

15
H

G. V. ZEVEKE - P. A. IONKIN

PRINCIPIOS DE ELECTROTECNIA

PRINCIPIOS DE LA TEORIA
DE LOS CIRCUITOS

NUEVA LIBRERIA S.R.L.

Balcarce 673 - 1084 Buenos Aires

Tel. 01-622-8288

Radiodifusión 01-57-016/012-6383 Cód. 7825

Télex 2112 UNIZ-AR REF. S/0846

Grupo editor de Buenos Aires

ÍNDICE

	PÁG.
PRÓLOGO	7

PRIMERA PARTE

PROPIEDADES Y MÉTODOS DE CÁLCULO DE LOS CIRCUITOS PARA CORRIENTES Y TENSIONES CONTINUAS

CAPÍTULO I

Métodos generales de cálculo y propiedades fundamentales de los circuitos eléctricos lineales

1-1. Elementos de los circuitos y de los esquemas eléctricos	11
1-2. Esquemas equivalentes para las fuentes de energía	14
1-3. La ley de Ohm aplicada al tramo de un esquema con fuentes de f. e. m.	18
1-4. Distribución del potencial a lo largo de un circuito eléctrico no ramificado	20
1-5. Equilibrio de potencias en un circuito simple no ramificado	22
1-6. Aplicación de las leyes de Kirchhoff al cálculo de circuitos ramificados	25
1-7. Método de los nudos	33
1-8. Método de las intensidades de malla	38
1-9. Principio de superposición	43
1-10. Propiedad recíproca	45
1-11. Conductancias propias y mutuas de las ramas	47
1-12. Teorema de compensación	52
1-13. Correlaciones lineales entre las tensiones y las intensidades	52
1-14. Teorema de los incrementos recíprocos de intensidades y tensiones ..	56

CAPÍTULO II

Transformaciones de los esquemas eléctricos lineales

2-1. Observaciones generales	58
2-2. Transformación de un esquema formado por resistencias en conexión mixta	59
2-3. Transformación recíproca de un triángulo y de una estrella de resistencias	62
2-4. Transformación de una conexión de resistencias en estrella multirradial en un polígono equivalente	67
2-5. Transformaciones de una conexión en paralelo de ramas que contienen fuentes de f. e. m. y de intensidad	70
2-6. Transformación de un esquema con fuente de f. e. m. en un esquema equivalente con intensidades de nudo (fuentes de intensidad)	72

CAPÍTULO III

Dipolos y cuádrupolos

	PÁG.
3-1. Consideraciones generales sobre los dipolos	77
3-2. Teorema del dipolo activo y su aplicación al cálculo de circuitos ramificados	78
3-3. Transmisión de la energía de un dipolo activo a uno pasivo	86
3-4. Cuádrupolos y sus ecuaciones fundamentales	89
3-5. Determinación de las constantes del cuádrupolo	92
3-6. Régimen del cuádrupolo en carga	94
3-7. Esquemas equivalentes de los cuádrupolos	98
3-8. Ecuaciones fundamentales y esquemas equivalentes de un cuádrupolo activo	102
3-9. Distribución de la tensión y de la intensidad en una línea con pérdidas	104

CAPÍTULO IV

Circuitos eléctricos con condensadores

4-1. Características generales de los circuitos eléctricos con condensadores	108
4-2. Leyes fundamentales de los circuitos eléctricos con condensadores ..	109
4-3. Cálculo de circuitos eléctricos ramificados que contienen condensadores	112
4-4. Capacidades parciales	116

CAPÍTULO V

Circuitos eléctricos no lineales

5-1. Elementos y esquemas equivalentes de los circuitos no lineales más simples	119
5-2. Método gráfico de cálculo de los circuitos no ramificados, con elementos no lineales	124
5-3. Cálculo gráfico de los circuitos que contienen elementos no lineales conectados en paralelo	125
5-4. Método gráfico de cálculo para los circuitos que contienen elementos pasivos lineales y no lineales, en conexión mixta	126
5-5. Ejemplos de estudio del régimen de los circuitos no lineales por el método analítico	127
5-6. Cálculo de circuitos ramificados que contienen elementos no lineales	130
5-7. Aplicación de la teoría del dipolo y del cuádrupolo activo al cálculo de circuitos que contienen elementos lineales y no lineales	135
5-8. Estabilidad del régimen en circuitos simples no ramificados con elementos no lineales	142

CAPÍTULO VI

Circuitos magnéticos

6-1. Conceptos fundamentales y leyes de los circuitos magnéticos	147
6-2. Cálculo de los circuitos magnéticos no ramificados	154
6-3. Cálculo de los circuitos magnéticos ramificados	158
6-4. Cálculo del circuito magnético de un imán anular permanente con entrehierro	162
6-5. Cálculo de un circuito magnético, no homogéneo, no ramificado, formado por un imán permanente	166

SEGUNDA PARTE

PROPIEDADES Y MÉTODOS DE CÁLCULO DE LOS CIRCUITOS CON CORRIENTES Y TENSIONES SINUSOIDALES

CAPÍTULO VII

Corrientes y tensiones sinusoidales

	PÁG.
7-1. Corrientes alternas	171
7-2. Nociones sobre los generadores de corriente alterna	173
7-3. Corriente sinusoidal	174
7-4. Los valores eficaces de la corriente, de la f. e. m. y de la tensión.	176
7-5. Representación de las funciones sinusoidales del tiempo por vectores y números complejos	178
7-6. Suma de las funciones sinusoidales del tiempo de igual frecuencia ..	180

CAPÍTULO VIII

Nociones fundamentales acerca de los circuitos de corriente sinusoidal

8-1. El circuito eléctrico y su esquema	183
8-2. Corriente sinusoidal en la resistencia	186
8-3. Corriente sinusoidal en la inductancia	188
8-4. Corriente sinusoidal en la capacidad	190
8-5. Conexión en serie de una resistencia, una inductancia y una capacidad	193
8-6. Impedancias, resistencias	196
8-7. Admitancias y conductancias	200
8-8. Potencias	204
8-9. Dipolo pasivo	209
8-10. Nociones acerca del efecto de superficie y de proximidad	213
8-11. Parámetros y esquemas equivalentes de los condensadores	216
8-12. Parámetros y esquemas equivalentes de las bobinas y de los reóstatos	217

CAPÍTULO IX

Cálculo de circuitos con corrientes sinusoidales

9-1. Conexión en serie de receptores de energía	221
9-2. Conexión en paralelo de receptores de energía	225
9-3. Conexión mixta de receptores de energía	227
9-4. Circuitos ramificados compuestos	229
9-5. Diagramas topográficos	233

CAPÍTULO X

Resonancia en los circuitos eléctricos

10-1. Resonancia en un circuito serie	237
10-2. Características de frecuencia de un circuito serie	240
10-3. Resonancia en un circuito con dos ramas en paralelo	243
10-4. Características de frecuencia de un circuito con dos ramas en paralelo	248
10-5. Noción de resonancia en circuitos compuestos	250

CAPÍTULO XI

PÁG.

Transmisión de energía con corriente y tensión sinusoidales

11-1. Relaciones entre las tensiones al principio y final de una línea de transmisión de energía	252
11-2. Condiciones para la transmisión de la potencia máxima en una línea	256
11-3. Condiciones de transmisión de la potencia máxima de un dipolo activo a uno pasivo	257
11-4. Cuadripolos pasivos	259

CAPÍTULO XII

Circuitos con inducción mutua

12-1. Elementos de un circuito acoplados inductivamente	262
12-2. Fuerza electromotriz de inducción mutua	265
12-3. Conexión en serie de receptores de energía con inductancia mutua	268
12-4. Conexión en paralelo de receptores de energía con inductancia mutua	270
12-5. Cálculo de los circuitos ramificados con inductancia mutua	272
12-6. Sustitución equivalente de los acoplamientos inductivos	275
12-7. Transferencia de la energía entre los elementos de un circuito acoplados inductivamente	278
12-8. Ley de conservación de las potencias reactivas	282
12-9. Transformador sin núcleo de acero (transformador en aire)	283
12-10. Transformador ideal	287
12-11. Fenómenos condicionados por la presencia de núcleos ferromagnéticos en las bobinas y en los transformadores	290
12-12. Diagrama vectorial y esquema equivalente de una bobina con núcleo de acero	293
12-13. Esquemas equivalentes de un transformador con núcleo de acero	294
12-14. Cálculo de circuitos eléctricos con transformadores	300
12-15. Autotransformador	302

CAPÍTULO XIII

Diagramas circulares

13-1. Diagramas circulares simples	304
13-2. Ecuación compleja de la circunferencia	308
13-3. Diagramas circulares para un circuito no ramificado y para un dipolo activo	310
13-4. Diagramas circulares para cualquier circuito ramificado	313
13-5. Diagramas circulares para los cuadripolos activo y pasivo	316

CAPÍTULO XIV

Circuitos trifásicos

14-1. Nociones sobre las fuentes de alimentación polifásicas y sobre los circuitos polifásicos	319
14-2. Conexión en estrella y en polígono	322
14-3. Régimen simétrico de un circuito trifásico	324
14-4. Algunas propiedades de los circuitos trifásicos con distintos esquemas de conexiones	327
14-5. Cálculo de los regímenes simétricos para los circuitos trifásicos	328

14-6. Cálculo de los regímenes asimétricos en los circuitos trifásicos con carga estática	330
14-7. Esquemas equivalentes de las líneas trifásicas	334
14-8. Medición de la potencia en los circuitos trifásicos	341
14-9. Campo magnético giratorio	343
14-10. Principios de funcionamiento de los motores asincrónico y sincrónico	345

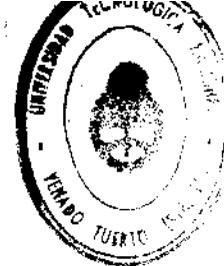
CAPÍTULO XV

Método de las componentes simétricas

15-1. Componentes simétricas del sistema trifásico de magnitudes	348
15-2. Algunas propiedades de los circuitos trifásicos en lo que respecta a las componentes simétricas de las corrientes y de las tensiones	351
15-3. Impedancias de un circuito trifásico simétrico para corrientes de distintas secuencias	355
15-4. La determinación de las corrientes en un circuito simétrico	359
15-5. Componentes simétricas de las tensiones y de las corrientes en un circuito trifásico asimétrico	361
15-6. Cálculo de un circuito con carga asimétrica	362
15-7. Cálculo de un circuito con un tramo asimétrico en la línea	367
15-8. Potencias de un circuito trifásico expresadas por medio de las componentes simétricas de las corrientes y de las tensiones	370
Bibliografía	372
Índice alfabético de materias	373

Traducción directa del ruso:
INC. EUGENIA FISHER

Ilustración portada:
NESTOR MENTABERRY



Se dedica este libro a la memoria del fundador de la Escuela Electrotécnica de Moscú, Karl A. Krug.

PRÓLOGO

La presente edición del texto "Principios de electrotecnia" redactado por los profesores de MEI (Instituto Energético de Moscú), se publica después de la muerte del autor de la edición precedente, Karl A. Krug, el creador de la Escuela Electrotécnica de Moscú, quien dedicó toda su labor a la preparación de especialistas electrotécnicos para nuestro país. El trabajo del equipo de autores en la preparación del texto para una nueva edición, fué organizado por el jefe de la cátedra Principios Teóricos de Electrotecnia, de MEI, profesor K. M. Polivánov.

Tomando en cuenta el deseo de los lectores, la nueva edición se publica en tres tomos. Debido a la modificación parcial del equipo de autores, la tercera parte fué redactada nuevamente. Cada tomo abarca aproximadamente el programa semestral de este curso en MEI. El contenido de los tres libros, corresponde fundamentalmente al programa aprobado por el Ministerio de Instrucción Superior en 1954 para los Institutos Electrotécnicos, Electromecánicos y Radiotécnicos.

Al restaurar el libro para una nueva edición los autores se propusieron dar, en lo posible, una exposición breve y clara de los principios y métodos fundamentales de cálculo y de análisis de los circuitos eléctricos y magnéticos y del campo electromagnético, e ilustrar con ejemplos los problemas más importantes.

Respondiendo a las tendencias modernas del desarrollo de la electrotecnia, a las exigencias de las disciplinas electrotécnicas especiales y a los deseos expresados al discutirse el libro en la prensa (discusión publicada en la revista "Elektrichestvo", crítica en Noticias de la Sección Ciencias Técnicas de la Academia de Ciencias de la URSS), como también en las sesiones de la Sociedad Científica Técnica y de la cátedra de Principios Teóricos de Electrotecnia de MEI, la nueva edición fué modificada y completada esencialmente, tanto en lo que se refiere a la estructura del curso como a su contenido.

Sin detenernos en las características de las cuestiones abordadas por los autores, al reestructurar la segunda y tercera partes del manual, señalaremos sólo las modificaciones y agregados introducidos en la primera parte del curso.

El capítulo referente a las definiciones y conceptos físicos está dis-

tribuido por todo el texto; el material fundamental de ese capítulo fué llevado a la tercera parte del curso: "Principios de la teoría del campo". Por consiguiente, la exposición empieza directamente con los circuitos eléctricos de corriente continua.

Los puntos examinados en el capítulo referente a bobinas y transformadores con núcleos de acero, fueron incluidos en la primera parte del curso y expuestos en la sección "Propiedades y métodos de cálculo de los circuitos con corrientes y tensiones sinusoidales". En la misma sección se estudian los circuitos eléctricos elementales con transformadores.

Se han ampliado y completado los capítulos referentes a: dipolos y cuadripolos, cálculo de circuitos con elementos no lineales, circuitos con inducción mutua, circuitos trifásicos y método de las componentes simétricas.

En el texto se hacen referencias a algunas fuentes bibliográficas que permiten profundizar determinados problemas del curso.

El trabajo de los autores se distribuyó de la siguiente manera: los capítulos 1-6 fueron escritos por el profesor P. A. Ionkin; los capítulos 7-15 por el profesor G. V. Zeveke. Nos es grato expresar nuestro agradecimiento a M. A. Perekalin, T. A. Tatur, N. K. Krug, por su participación activa en la discusión del original del libro y a G. P. Andreiev por la ayuda prestada en la resolución de los problemas.

Manifestamos nuestro reconocimiento al profesor y crítico G. I. Atabekov, quien revisó atentamente el original de la nueva edición e hizo una serie de valiosas observaciones, y también a todos aquellos que tomaron parte en el estudio y en la discusión de las distintas secciones en esta primera edición.

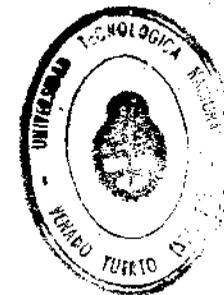
Agradecemos a B. I. Zhujovitzky la gran ayuda prestada en la redacción y preparación del original para su impresión.

Rogamos se envíen todas las observaciones, pedidos y comentarios a Gosenergoizdat (Editorial Energética Estatal), Moscú - 114 - Shliuzovaya Naberezhnaya C. 10.

LOS AUTORES.

PRIMERA PARTE

PROPIEDADES Y METODOS DE CALCULO DE LOS CIRCUITOS PARA CORRIENTES Y TENSIONES CONTINUAS



CAPÍTULO I

MÉTODOS GENERALES DE CÁLCULO Y PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LOS CIRCUITOS ELÉCTRICOS LINEALES

1-1. Elementos de los circuitos y de los esquemas eléctricos.

Llamaremos *circuito eléctrico* al conjunto de elementos que crea la posibilidad de que se origine en ellos una corriente eléctrica.

Los circuitos eléctricos están destinados a la distribución y a la transformación recíproca de la energía eléctrica y de otras clases de energía. Los *elementos* fundamentales de un *circuito eléctrico* son las fuentes y los receptores de energía eléctrica y los conductores que los unen entre sí.

Las fuentes de energía eléctrica (pilas, acumuladores, generadores, etc.) transforman la energía mecánica, química, térmica y otras en energía eléctrica; los receptores de energía eléctrica (lámparas eléctricas, artefactos electrotérmicos, motores eléctricos, etc.), a la inversa, transforman la energía eléctrica en calórica, lumínica, mecánica, etc.

Los circuitos eléctricos, en los cuales la obtención de la energía eléctrica en las fuentes y su transformación en los receptores se realiza bajo intensidades y tensiones invariables en el tiempo, los llamaremos circuitos de corriente continua.

En lugar de la expresión "receptor de energía eléctrica" utilizaremos en adelante términos más breves y equivalentes; receptor, carga, consumidor; y en lugar de la expresión "fuente de energía eléctrica" usaremos otras más breves: fuente de energía, fuente de alimentación, o fuente, simplemente.

En la figura 1-1 vemos una instalación eléctrica simple, donde la fuente de energía está representada por una batería de acumuladores y el receptor, por unas lámparas eléctricas. Los bornes de la fuente

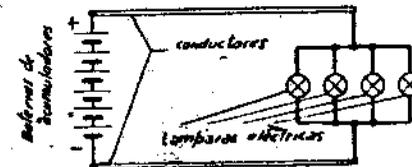


FIG. 1-1



y del receptor están unidos entre sí por dos conductores. La fuente de energía, los conductores unidos a ella y el receptor forman un circuito conductor cerrado. En este circuito, bajo la acción de la fuerza electromotriz (f.e.m.) de la fuente de energía, se produce un movimiento ininterrumpido y dirigido en un mismo sentido, de cargas eléctricas.

El conjunto de estos tres elementos, fuente de energía, dos conductores y receptor, representa un circuito eléctrico elemental de corriente continua. En la práctica, los circuitos de corriente continua son más complejos y tienen un mayor número de fuentes o de receptores. Tanto en los circuitos simples como en los compuestos, todos los campos magnéticos y eléctricos, para intensidades y tensiones continuas, tampoco varían en el tiempo. Por lo tanto, en este tipo de circuitos no surgen f.e.m. de auto-inducción y de inducción mutua, ni existen corrientes de desplazamientos en los dieléctricos que rodean a los conductores.

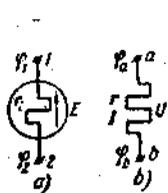


FIG. 1-2

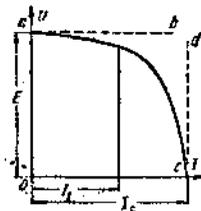


FIG. 1-3

Para facilitar el análisis de los procesos que se realizan en un circuito eléctrico, se lo suele reemplazar por un esquema de cálculo o un circuito idealizado. A tal efecto, se utilizan los conceptos de dos elementos fundamentales del esquema: el de la fuerza de energía con f.e.m. E y resistencia interna r1, y el de las resistencias de los receptores y conductores r (fig. 1-2).

La fuerza electromotriz E (fig. 1-2 a) se determina, no habiendo corriente en la fuente de energía, por la diferencia de potenciales (o por la tensión) en sus bornes (1 y 2), independientemente de la naturaleza física de su origen (f.e.m. de contacto, f.e.m. térmica, etc.).

$$E = \varphi_1 - \varphi_2 = U. \quad (1-1)$$

El sentido de la f.e.m. se toma desde el potencial inferior hacia el superior y se lo designa con una flecha.

Si se une un receptor a los bornes de una fuente de energía (se lo carga), en el circuito cerrado se origina una corriente. Entonces, la tensión o diferencia de potenciales en los bornes 1 y 2 ya no será igual a la f.e.m., en virtud de la caída de tensión U_i dentro de la fuente de energía, o sea, en su resistencia interna r1:

$$U_i = r_1 \cdot I.$$

En la figura 1-3 se muestra una de las curvas características exteriores más típicas $U = \varphi_1 - \varphi_2 = U(I)$ de una fuente de energía en

carga. Del análisis de la curva se deduce que al crecer la intensidad desde cero a $I \approx I_1$, la tensión en los bornes de la fuente de energía disminuye según una línea recta

$$U = E - U_i = E - r_1 \cdot I.$$

En otras palabras, la caída de tensión U_i dentro de la fuente de energía, entre límites dados, crece proporcionalmente a la intensidad. Cuando la intensidad pasa de un cierto límite, se destruye la proporcionalidad entre ésta y la caída de tensión en la fuente de energía, y la curva característica deja de ser lineal. Esa disminución de la tensión es provocada, en algunas fuentes de energía, por la reducción de la f.e.m., por el aumento de la resistencia interna o, por ambos factores al mismo tiempo.

La potencia desarrollada por la fuente de energía se determina por la fórmula

$$P_u = E \cdot I. \quad (1-2)$$

Considerando el problema de la potencia, conviene señalar que se ha creado el hábito de usar inexactamente ese término. Así, por ejemplo, se habla de potencia generada, consumida, entregada, transmitida, perdida, etc. En realidad, lo que se genera, se consume, se entrega, se transmite o se pierde no es a potencia sino la energía. La potencia caracteriza la intensidad del proceso energético correspondiente y se mide por la cantidad de energía (generada, entregada, transmitida, etc.) referida a una unidad de tiempo. Por lo tanto, lo correcto sería hablar de potencia de generación de energía, de potencia de transmisión o de consumo de energía, etc. Siguiendo el uso establecido, en adelante se emplearán frecuentemente las expresiones mencionadas, inexactas, pero breves.

La resistencia del receptor r (fig. 1-2, b) caracteriza, como elemento de un circuito idealizado, el consumo de energía eléctrica, es decir, su transformación en otras formas de energía, con una potencia

$$P = r \cdot I^2. \quad (1-3)$$

En un caso general la resistencia del receptor es función de la intensidad de la corriente en ese receptor $r(I)$.

Según la ley de Ohm la tensión en la resistencia es

$$U = r \cdot I. \quad (1-4)$$

Conviene señalar que ya en 1801-1802, el académico V. V. Petrov se acercó bastante a esa ley (1-4) entre la tensión U y la intensidad I . Más tarde, en 1826, esa ley fué formulada por Ohm (Bibl. 2).

Junto con el concepto de resistencia, para el cálculo de los circuitos se introduce la noción de conductancia

$$g = \frac{1}{r}.$$

En la práctica, frecuentemente, en lugar de darse la resistencia en función de la intensidad $r(I)$, se da la tensión en función de la intensidad $U(I)$ o su inversa $I(U)$. Las curvas características $U(I)$ y $I(U)$ se suelen denominar curvas de Volt-Ampere.

En la figura 1-4 se dan las curvas características para una lámpara con filamento metálico $U_1(I)$ y para una lámpara con filamento de carbón $U_2(I)$. De su observación se deduce que la relación entre la tensión y la intensidad en cada lámpara no es lineal. La resistencia de una lámpara con filamento metálico crece con la intensidad, mientras

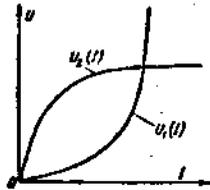


Fig. 1-4

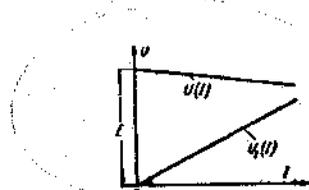


Fig. 1-5

que la resistencia de una lámpara con filamento de carbón disminuye al aumentar la intensidad. Los circuitos eléctricos que contienen elementos cuyas características no son lineales, se llaman *no lineales*.

Si las f.e.m., las resistencias internas y las resistencias de los receptores se consideran independientes de las intensidades y de las tensiones, entonces las curvas características exteriores de las fuentes de energía, $U(I)$, y las curvas de Volt-Ampere de los receptores, $U_1(I)$, serán lineales (fig. 1-5). Los circuitos eléctricos que sólo contienen elementos con características lineales, se denominan *lineales*.

Un gran número de circuitos eléctricos reales pueden clasificarse entre los circuitos lineales. Por lo tanto, el estudio de las propiedades y de los métodos de cálculo de los circuitos eléctricos lineales, presenta no sólo un interés teórico, sino también un marcado interés práctico.

1-2. Esquemas equivalentes para las fuentes de energía.

El esquema eléctrico, compuesto de elementos fundamentales, debe servir de modelo para el cálculo de un circuito real, es decir, debe permitir el estudio analítico de su estado eléctrico.

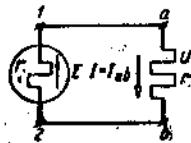


Fig. 1-6

Un circuito eléctrico elemental y su esquema constan de una fuente de energía con una f.e.m. E y con una resistencia interna r_i y de un

receptor de resistencia r (fig. 1-6). La corriente, en la parte exterior del circuito (respecto a la fuente de energía), es decir, en la resistencia r , se considera dirigida desde el punto a de potencial mayor $\varphi_1 = \varphi_a$ hacia el punto b que tiene un potencial menor $\varphi_2 = \varphi_b$.

El sentido de la corriente se señala con una flecha blanca y a la letra I se agregan dos subíndices, el primero de los cuales se refiere al punto de mayor potencial y el segundo al de menor potencial. Así, por ejemplo, en la figura 1-6, $I = I_{ab}$.

Vamos a demostrar que la fuente de energía con una f.e.m. conocida E y una resistencia interna r_i puede representarse por dos sistemas equivalentes fundamentales (fig. 1-7 y 1-8).

La tensión en los bornes de la fuente es menor que la f.e.m. E en un valor igual a la caída de tensión que se produce en el interior de la fuente

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = E - U_i = E - r_i I. \quad (1-5)$$

Por otra parte, la tensión en la resistencia r en virtud de las igualdades $\varphi_1 = \varphi_a$ y $\varphi_2 = \varphi_b$ es

$$U = \varphi_a - \varphi_b = rI. \quad (1-6)$$

De las (1-5) y (1-6) se deduce que $E - r_i I = rI$ o también

$$E = r_i I + rI \quad (1-7)$$

y

$$I = \frac{E}{r_i + r}.$$

De aquí vemos que la resistencia interna r_i de la fuente, del mismo modo que la resistencia del receptor, limitan el valor de la intensidad.

En un esquema equivalente se puede representar la resistencia interna r_i conectada en serie con la resistencia del receptor r . Estableciendo una relación entre las tensiones existentes en esas resistencias se puede obtener fácilmente dos variantes de esquemas equivalentes (fig. 1-7).

En el esquema equivalente de la figura 1-7, a , la tensión U depende de la intensidad de carga y se determina por la diferencia entre la f.e.m. E y la caída de tensión U_i . Si $r_i \ll r$ es decir si la fuente de energía eléctrica se encuentra en un régimen próximo al que se denomina "marcha en vacío", se puede despreciar prácticamente la caída

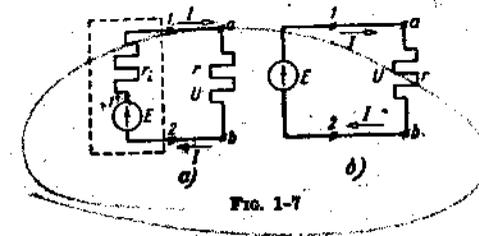


Fig. 1-7

interna de tensión, tomar $U_i = r_i I \approx 0$ y obtener el esquema equivalente (fig. 1-7, b). Una fuente de energía de ese tipo, sin resistencia interna ($r_i = 0$) y que se designa con un círculo con flecha y con la letra E , se denomina *fente de f.e.m.* (*fente de tensión* o *fente de tensión dada*). La tensión en sus bornes no depende de la resistencia del receptor y es igual a la f.e.m. E . Su curva característica exterior es una recta, paralela al eje de las abscisas (recta de trazos ab en la fig. 1-3).

La fuente de energía puede representarse por dos variantes de otro esquema equivalente (fig. 1-8).

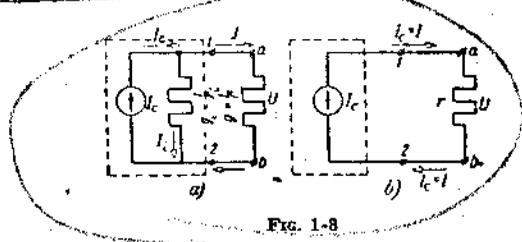


Fig. 1-8

Para fundamentar este enunciado dividamos ambos miembros de la ecuación (1-7) por r_i .

Obtenemos:

$$\frac{E}{r_i} = I + \frac{U}{r_i} = I + Ug_i$$

o también:

$$I_c = I + I_i \tag{1-8}$$

donde $I_c = \frac{E}{r_i}$ designa la intensidad de la corriente, estando la fuente de energía en corto circuito; $I_i = \frac{U}{r_i} = Ug_i$ es una cierta intensidad igual a la relación de la tensión en los bornes de la fuente y su resistencia interna; $I = \frac{U}{r} = Ug$ es la intensidad de corriente en el receptor. El esquema equivalente (fig. 1-8 a), donde la resistencia interna r_i está montada en paralelo con la resistencia de carga r , satisface a la ecuación obtenida (1-8).

Si $g_i \ll g$ o $r_i \gg r$, es decir si la fuente de energía se encuentra en un régimen próximo al "corto circuito", se puede tomar la intensidad

$$I_i = Ug_i \approx 0$$

y obtener como resultado el esquema equivalente (fig. 1-8, b).

Una fuente de ese tipo, con conductancia interna $g_i = 0$ ($r_i = \infty$) se designa con un círculo con flecha y con la letra I_c y se denomina *fente de intensidad* o de corriente (fente con una corriente de intensidad

dada). La intensidad I_c no depende de la resistencia del receptor r y es igual a $\frac{E}{r_i}$.

La curva característica exterior de la fuente de intensidad es una recta, paralela al eje de las ordenadas (recta de trazos cd en la fig. 1-3).

De modo que, según sea la relación entre la resistencia interna de la fuente de energía r_i y la resistencia del receptor r , las fuentes reales de energía eléctrica podrán clasificarse entre las fuentes de f.e.m. o entre las fuentes de intensidad.

Sin embargo, una fuente de energía puede ser sustituida por una fuente de f.e.m. o de intensidad también en los casos en que la resistencia interna r_i sea commensurable con la resistencia r del receptor. Para ello es necesario extraer la resistencia r_i (fig. 1-7, a) o la conductancia $g_i = \frac{1}{r_i}$ (fig. 1-8, a) de la fuente de energía y unir las con la resistencia r o con la conductancia g respectivamente, del receptor.

Las fuentes de f.e.m. y las fuentes de intensidad se llaman *elementos activos* de los esquemas eléctricos equivalentes; las resistencias y conductancias se llaman *elementos pasivos*.

Al construir un esquema eléctrico para uno u otro circuito real, se trata, en la medida de lo posible, de tomar en cuenta las propiedades eléctricas conocidas, tanto para los distintos sectores, como para el circuito en su totalidad.

Examinemos el ejemplo de construcción de un esquema equivalente para una línea de transmisión bifilar de energía eléctrica, esquemáticamente representada en la figura 1-9, a. En el comienzo de la línea hay una fuente de energía con f.e.m. E_1 y resistencia interna r_1 y al final de la línea está montado un receptor de energía, cuya resistencia es igual a r_2 .

La tensión en el receptor, es evidentemente menor que la tensión en el comienzo de la línea, en un valor igual a la caída de tensión en la resistencia de los conductores. La intensidad en el final de la línea es menor que la intensidad de la fuente en un valor igual a la intensidad de la pérdida entre los conductores (en virtud de la imperfección de la aislación).

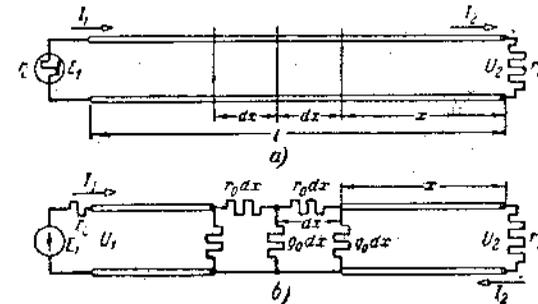


Fig. 1-9



Supongamos que la unidad de longitud de cada conductor tiene una resistencia $\frac{r_0}{2}$ y la conductancia entre los conductores para igual longitud de línea es g_0 .

Dividamos toda la línea en elementos de longitud dx (fig. 1-9, a). Cada elemento posee una resistencia total igual a la suma de las resistencias en los conductores de ida y de retorno

$$r_0 dx = \frac{r_0}{2} dx + \frac{r_0}{2} dx,$$

y una conductancia $g_0 dx$.

Como resultado, toda la línea puede representarse por un esquema eléctrico formado por elementos unidos entre sí, de resistencia $r_0 dx$ y conductancia $g_0 dx$, cada uno (fig. 1-9, b).

La fuente de energía está representada en este esquema eléctrico equivalente como una fuente de f.e.m. E_1 y una resistencia r_1 .

Utilizando el esquema obtenido (fig. 1-9, b) se puede hallar, partiendo de la tensión y de la intensidad existente en uno de los extremos de la línea, la tensión o la intensidad en cualquier otro punto de la misma (§ 3-9).

Si la corriente de pérdida en la línea es notablemente menor que la intensidad del receptor, se la puede despreciar y se pueden eliminar del esquema eléctrico todas las conductancias $g_0 dx$. En consecuencia, se obtendrá un esquema simple no ramificado, con la misma intensidad en todos los elementos, representado en la figura 1-10, donde la resistencia de la línea $r_l = r_0 l$ está conectada en serie con las resistencias r_1 y r_2 . Se puede utilizar el esquema de la figura 1-10 para establecer la relación entre las tensiones y potencias en los extremos de la línea sin tomar en cuenta la corriente de pérdida (§ 3-3).

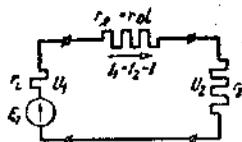


FIG. 1-10

De acuerdo a las propiedades eléctricas del circuito y a las condiciones de un problema dado, hay que saber elegir los esquemas eléctricos equivalentes y utilizarlos para estudiar los regímenes en los circuitos eléctricos reales.

1-3. La ley de Ohm aplicada al tramo de un esquema con fuentes de f.e.m.

Se sabe que para determinar numéricamente el potencial de cualquier punto de un circuito eléctrico es necesario fijar arbitrariamente

el potencial de algún punto del circuito. Así, si en el esquema representado en la figura 1-7, a, suponemos por ejemplo $\varphi_2 = \text{const.} = a$, entonces

$$\varphi_1 = \varphi_2 + E = a + E. \quad (1-9)$$

La corriente, en la parte exterior de cualquier circuito eléctrico elemental y, en general, en cualquier elemento pasivo del circuito se dirige desde un punto que tiene un potencial más alto hacia un punto de potencial más bajo. Por lo tanto, el potencial φ_1 del punto 1 es mayor que el del punto 2:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + rI.$$

Del mismo modo

$$\varphi_1 = \varphi_1 + r_1 I. \quad (1-10)$$

De las igualdades (1-9) y (1-10) tenemos:

$$\varphi_2 + E = \varphi_1 + r_1 I,$$

de donde la intensidad

$$I = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E}{r_1} \quad (1-11)$$

Análogamente se puede escribir la fórmula para la intensidad de un tramo no ramificado de un esquema eléctrico compuesto, que contenga un número arbitrario de fuentes de f.e.m. y de resistencias y cuya diferencia de potenciales en los extremos del tramo esté dada (fig. 1-11). La corriente de intensidad I , en el tramo del esquema que contiene las fuentes de f.e.m., puede dirigirse desde el punto a al punto b o a la inversa.



FIG. 1-11

Si el sentido de la corriente no se conoce de antemano, se lo elegirá arbitrariamente, a fin de poder escribir las expresiones de la forma (1-11).

El sentido de la corriente elegido arbitrariamente en el tramo dado, se llama *sentido positivo* y se designa, como el sentido real, con una flecha blanca o afectando con subíndices la letra I .

Tomemos como sentido positivo de la corriente I (fig. 1-11) el que va del punto a al punto b . El potencial φ_b se determina en función del potencial φ_a por la expresión

$$\varphi_b = \varphi_a - r_1 I + E_1 - r_2 I + E_2 - r_3 I - E_3 - r_4 I.$$

De esa igualdad tenemos

$$I = I_{ab} = \frac{\varphi_a - \varphi_b + E_1 + E_2 - E_3}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} = \frac{U_{ab} + \Sigma E}{r_{ab}} = (U_{ab} + \Sigma E) g_{ab}, \quad (1-12)$$

donde $r_{ab} = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ es la resistencia total del tramo del esquema; $\varphi_a - \varphi_b = U_{ab}$ es la diferencia de potenciales entre los bornes del tramo examinado, tomada de acuerdo al sentido elegido de la corriente; $\Sigma E = E_1 + E_2 - E_3$ es la suma algebraica de las f.e.m. que actúan en ese mismo tramo; cada f.e.m., coincidente por su sentido con el sentido positivo de la corriente, se anota con signo positivo, y la no coincidente, con signo negativo.

La fórmula (1-12) representa la ley de Ohm para el tramo de un esquema con fuentes de f.e.m.

Si el cálculo por la fórmula (1-12) da para la intensidad un valor negativo, significa que el sentido real de la intensidad no coincide con el positivo elegido (es opuesto al sentido elegido arbitrariamente).

El sentido positivo de la tensión, entre puntos cualesquiera del circuito, también puede elegirse arbitrariamente. Se lo indica afectando con subíndices la letra U , o con una flecha, que para una tensión $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ se colocará dirigida de a a b , atribuyendo arbitrariamente al punto a un potencial mayor que al punto b .

El sentido positivo de las f.e.m. y de las intensidades de las fuentes respectivas, cuando sus sentidos reales se desconocen, se eligen también arbitrariamente y se indican con flechas o subíndices dobles.

En los tramos de los esquemas que tienen elementos pasivos, se hacen coincidir el sentido positivo de la tensión y el de la intensidad. En este caso se puede no colocar flecha que indique la tensión. Tanto la intensidad como la tensión deben considerarse en los cálculos como magnitudes algebraicas.

1-4. Distribución del potencial a lo largo de un circuito eléctrico no ramificado.

La distribución del potencial a lo largo de un circuito eléctrico no ramificado, puede representarse gráficamente. En la figura 1-12 se ve el esquema de un circuito elemental no ramificado con dos fuentes de f.e.m. E_1 y E_2 y resistencias internas r_{11} y r_{12} .

Supongamos que E_1 sea mayor que E_2 . En este caso, la intensidad real es:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_{11} + r_2 + r_{12}} \quad (1-13)$$

y coincide con el sentido de la f.e.m. E_1 . Para fijar el potencial de cada punto del circuito en cuestión, tomemos el potencial del punto a igual a cero. Hallemos los potenciales de los puntos restantes.

El potencial del punto b es menor que el del punto a .

$$\varphi_b = \varphi_a - r_1 I = -r_1 I.$$

Al pasar por la primera fuente de energía, el potencial se eleva en una cantidad E_1 y disminuye por la caída de tensión interna, de modo que el potencial del punto c será

$$\varphi_c = \varphi_b + E_1 - r_{11} I = -r_1 I + E_1 - r_{11} I.$$

Para determinar el potencial φ_d del punto d hay que restar $r_2 I$ del potencial φ_c , es decir

$$\varphi_d = \varphi_c - r_2 I = -r_1 I + E_1 - r_{11} I - r_2 I.$$

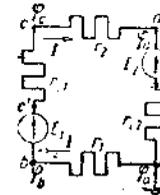


Fig. 1-12

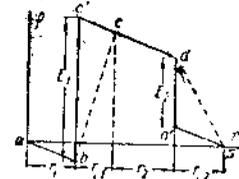


Fig. 1-13

Finalmente, al pasar por la segunda fuente de energía, el potencial disminuye, tanto debido a la f.e.m. E_2 (por definición de f.e.m. $\varphi_d > \varphi_e$) como por la caída interna de tensión, debiendo ser el potencial del punto a igual a cero:

$$\varphi_a = \varphi_d - E_2 - r_{12} I = -r_1 I + E_1 - r_{11} I - r_2 I - E_2 - r_{12} I = 0.$$

Es necesario señalar que de esta última expresión es fácil obtener la fórmula (1-13).

Si se llevan sobre el eje de las abscisas, las resistencias de los tramos, y sobre el eje de las ordenadas los potenciales de los puntos correspondientes (fig. 1-13) será fácil obtener el gráfico de distribución del potencial a lo largo de un circuito no ramificado. Utilizando este gráfico se puede determinar la tensión entre dos puntos cualesquiera del circuito. En particular, se deduce del gráfico que la tensión en los bornes de la primera fuente de energía $U_{cb} = \varphi_c - \varphi_b = E_1 - r_{11} I$ es menor que su f.e.m. E_1 en una cantidad igual a su caída interna de tensión, y la tensión U_{da} en los bornes de la segunda fuente de energía, por el contrario, es mayor que la f.e.m. E_2 en un valor igual a su caída de tensión interna, es decir:

$$U_{da} = \varphi_d - \varphi_a = E_2 + r_{12} I.$$

La relación entre la tensión y la resistencia de cualquier sector pasivo del circuito es igual a la intensidad de la corriente en el sector; en el gráfico de potenciales está dada por la tangente del ángulo que forma la recta correspondiente con el eje de las abscisas. Por lo tanto,

las rectas (por ejemplo ab y cd en la fig. 1-13) que determinan la variación del potencial en todos los sectores pasivos del circuito no ramificado, cuya intensidad es la misma, tienen igual pendiente.

El gráfico de distribución de los potenciales dentro de la fuente de energía puede tener diversos aspectos. En el caso más simple, cuando la distribución de r_i y de E dentro de la fuente se puede considerar uniforme, la variación del potencial estará dada por una recta que muestra o el crecimiento continuo (en la fuente con f.e.m. E_1 la línea de puntos bc) o una disminución continua del potencial (en la fuente con f.e.m. E_2 la línea de puntos da).

1-5. Equilibrio de potencias en un circuito simple no ramificado.

Analicemos las correlaciones energéticas en un circuito eléctrico que consta, por ejemplo, de una máquina de corriente continua con f.e.m. E_1 y resistencia interna r_{i1} , y de una batería de acumuladores con f.e.m. E_2 y resistencia interna r_{i2} (fig. 1-14).

Las fuerzas electromotrices de la máquina y de la batería están dirigidas una al encuentro de la otra. Supongamos que la f.e.m. E_1 de la máquina sea mayor que la f.e.m. E_2 de la batería. En esas condiciones, el sentido real de la corriente I coincidirá con el de la f.e.m. E_1 . La tensión U en los bornes de ambas fuentes es menor que la f.e.m. E_1 en una cantidad igual a la caída de tensión $r_{i1}I$ en la máquina, y mayor que la f.e.m. E_2 en un valor $r_{i2}I$, como se demostró en el párrafo precedente

$$U = E_1 - r_{i1}I \quad (1-14)$$

$$U = E_2 + r_{i2}I \quad (1-15)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (1-14) por I y transponiendo los términos, obtenemos:

$$E_1I = r_{i1}I^2 + UI \quad (1-16)$$

El primer miembro de esta ecuación representa la potencia desarrollada por la máquina; el primer término del segundo miembro

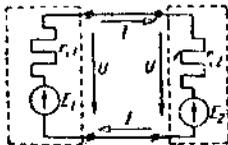


Fig. 1-14



Fig. 1-15

representa la potencia de las pérdidas térmicas en el bobinado de la máquina y el segundo término, la potencia entregada por la máquina

y en consecuencia, consumida por la batería de acumuladores. Multiplicando por I ambos miembros de la ecuación (1-15) obtenemos:

$$UI = r_{i2}I^2 + E_2I \quad (1-17)$$

De esa ecuación se desprende que la potencia UI , absorbida por la batería, se gasta en pérdidas térmicas $r_{i2}I^2$ y en cargar los acumuladores E_2I .

Las relaciones obtenidas para establecer el balance de las potencias son aplicables, por cierto, no sólo a un circuito de carga de acumuladores, sino a cualquier otro. La diferencia consiste en que en los receptores de otro tipo la energía se invierte en otros procesos, por ejemplo, en la ejecución de un trabajo mecánico en los motores eléctricos.

Si se representa la fuente de energía por otro esquema equivalente (fig. 1-15) resultará que la potencia desarrollada por la fuente de intensidad no es igual a la potencia desarrollada por la fuente de f.e.m.

En efecto, la potencia desarrollada por la fuente de intensidad está dada por el producto de la intensidad I_{c1} por la tensión U en los bornes de la fuente de corriente, es decir $I_{c1}U$. Como $I_{c1} = I_{i1} + I$ y $I_{i1} = \frac{U}{r_{i1}}$, resulta que al sustituir la intensidad I_{c1} y después de hacer las transformaciones elementales tendremos

$$I_{c1}U = (I_{i1} + I)U = \frac{U^2}{r_{i1}} + UI \quad (1-18)$$

Comparando las expresiones (1-18) y (1-16) se desprende que para una misma tensión en los bornes de ambas fuentes y una intensidad igual, las pérdidas térmicas $r_{i1}I^2$ en el esquema de la figura 1-14 no son en general iguales a las pérdidas térmicas $\frac{U^2}{r_{i1}}$ del esquema 1-15, y por lo tanto, la potencia desarrollada por la f.e.m. E_1I , no es igual a la potencia $I_{c1}U$ desarrollada por la fuente de intensidad. Esta circunstancia debe tomarse en cuenta al reemplazar la fuente de energía por una fuente de f.e.m. o por una de intensidad.

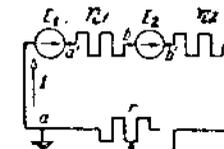


Fig. 1-16

Problema 1-1. En los bornes de dos fuentes de energía montadas en serie ($E_1 = 12$ V; $E_2 = 48$ V; $r_{i1} = 0,4$ Ω ; $r_{i2} = 0,6$ Ω) se ha conectado un receptor con resistencia variable r (fig. 1-16). Determinar el valor de la resistencia r , para la cual la potencia tenga un valor máximo. Hallar la potencia del receptor y de las fuentes de energía para dicha resistencia.

Solución. A fin de determinar la resistencia r para la cual la potencia sea máxima, utilicemos la expresión de la potencia $P = rI^2$.

Como la intensidad es

$$I = \frac{E_1 + E_2}{r_{i1} + r_{i2} + r}$$

entonces

$$P = r \frac{(E_1 + E_2)^2}{(r_{i1} + r_{i2} + r)^2}$$

Tomemos la derivada de P respecto a r e igualémosla a cero: tendremos como resultado

$$r = r_{i1} + r_{i2} = 1 \Omega.$$

Las magnitudes restantes se determinan por las fórmulas siguientes:

la intensidad

$$I = \frac{E_1 + E_2}{2r} = \frac{12 + 48}{2} = 30 \text{ A};$$

la potencia de la primera y de la segunda fuente de f.e.m.

$$P_{f1} = E_1 I = 12 \cdot 30 = 360 \text{ W};$$

$$P_{f2} = E_2 I = 48 \cdot 30 = 1440 \text{ W};$$

la potencia del receptor

$$P = rI^2 = 1 \cdot 30^2 = 900 \text{ W}.$$

Las pérdidas térmicas en ambas fuentes

$$\Delta P_f = (r_{i1} + r_{i2}) I^2 = P_{f1} + P_{f2} - P = 900 \text{ W}.$$

Problema 1-2. En la figura 1-17 se representa un esquema elemental que se aplica en los mecanismos de cálculo para sumar cantidades. Demostrar que la tensión U es proporcional a la suma de las resistencias sumandos r_x , r_y y r_z o a la suma de las cantidades x , y , z , representadas por los desplazamientos de los cursores de los correspondientes reóstatos.

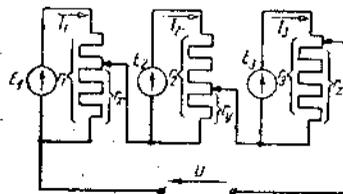


FIG. 1-17

Solución. Las intensidades I_1 , I_2 e I_3 (fig. 1-17) son independientes una de la otra e iguales a:

$$I_1 = \frac{E_1}{r_1}; \quad I_2 = \frac{E_2}{r_2} \quad \text{e} \quad I_3 = \frac{E_3}{r_3}.$$

La tensión

$$U = \frac{E_1}{r_1} r_x + \frac{E_2}{r_2} r_y + \frac{E_3}{r_3} r_z.$$

Supongamos que $E_1 = E_2 = E_3 = E$, $r_1 = r_2 = r_3 = r$, y representemos a las resistencias r_x , r_y y r_z en forma de funciones lineales de los desplazamientos x , y y z de los cursores en los correspondientes reóstatos, es decir

$$r_x = \frac{r}{l} x; \quad r_y = \frac{r}{l} y \quad \text{y} \quad r_z = \frac{r}{l} z;$$

donde l es la longitud total de cada reóstato. Como resultado, la tensión total U

$$U = \frac{E}{l} (x + y + z) = k(x + y + z)$$

será proporcional a la suma de las cantidades que se adicionan.

Señalemos que la relación obtenida es válida cuando la resistencia de la carga que se conecta a los bornes de tensión U , sobrepasa apreciablemente a la resistencia r .

1-6. Aplicación de las leyes de Kirchhoff al cálculo de circuitos ramificados.

Para el cálculo de un circuito eléctrico ramificado de cualquier clase, es de fundamental importancia el número de ramas y de nudos de su esquema.

Se llama *rama* de un esquema eléctrico aquella parte que consta sólo de fuentes de f.e.m. y de resistencias conectadas en serie, es decir, que tiene dos bornes para su conexión con los otros tramos del esquema. Se llama *nudo* de un esquema eléctrico el punto en el cual concurren por lo menos tres ramas.

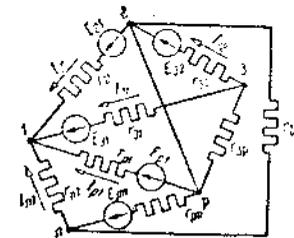


FIG. 1-18

Al recorrer las ramas pueden obtenerse *circuitos cerrados* o *abiertos*.

En la figura 1-18 se ve un esquema eléctrico con cinco nudos y nueve ramas. Como caso particular, puede haber ramas con resistencias prácticamente nulas (rama 2-p) y ramas con resistencias y sin f.e.m. (rama 1-n).

El estado eléctrico de un circuito de cualquier configuración queda totalmente determinado con la primera y la segunda ley de Kirchhoff.

La primera ley de Kirchhoff se aplica a los nudos y se formula de la siguiente manera: la suma algebraica de las intensidades de corriente en un nudo es igual a cero.

$$\sum I = 0. \quad (1-19)$$

En esta ecuación debe darse el mismo signo a las corrientes que tienen igual sentido respecto al punto nodal. De ahora en adelante, en las ecuaciones correspondientes a la primera ley de Kirchhoff, afectaremos con signo negativo las corrientes que afluyen al nudo, y las que se alejan del nudo, con signo positivo.

La segunda ley de Kirchhoff se aplica a los circuitos (mallas) cerrados y se formula de la siguiente manera: en cualquier malla la suma algebraica de las f.e.m. es igual a la suma algebraica de las tensiones existentes en las resistencias que forman parte de dicha malla.

$$\sum E = \sum rI. \quad (1-20)$$

En esta ecuación se atribuirá el signo positivo a las intensidades y f.e.m. cuyo sentido positivo coincida con el sentido de circulación elegido arbitrariamente para el circuito estudiado.

En la teoría de los circuitos eléctricos se presentan problemas de dos tipos. Al primer tipo pertenecen los problemas analíticos tales como por ejemplo: conociendo la configuración y los elementos de una red, hallar las intensidades, las tensiones y las potencias de unos u otros tramos. Al segundo tipo pertenecen los problemas inversos, en los que se conocen, por ejemplo, las intensidades y las tensiones y se desea encontrar su configuración y elegir sus elementos. Estos últimos son los problemas de síntesis de los circuitos eléctricos.

En la electrotecnia práctica los problemas que se encuentran con más frecuencia son los analíticos y serán los que examinaremos en lo sucesivo.

Para resolver los problemas analíticos, con ayuda de las leyes de Kirchhoff, es necesario establecer las ecuaciones del estado eléctrico de uno u otro esquema del circuito dado. Al establecer las ecuaciones se recomienda observar el siguiente orden: elegir primero el sentido positivo de las corrientes en todas las ramas del esquema eléctrico, luego formar las ecuaciones de los nudos según la primera ley de Kirchhoff y por fin formar las ecuaciones de las mallas de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff.

Supongamos que el esquema eléctrico consta de m ramas y de n nudos. Demostraremos que, de acuerdo a la primera y a la segunda ley de Kirchhoff, se pueden formar respectivamente $(n-1)$ y $(m-n+1)$ ecuaciones mutuamente independientes que, en su conjunto, nos dan el número necesario y suficiente de ecuaciones para determinar las m intensidades (en todas las ramas).

De acuerdo a la primera ley de Kirchhoff para n nudos (fig. 1-18) podemos escribir n ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} I_{12} + I_{13} + \dots + I_{1p} + \dots + I_{1n} &= 0; \\ I_{21} + I_{23} + \dots + I_{2p} + \dots + I_{2n} &= 0; \\ \dots & \\ I_{n1} + I_{n2} + \dots + I_{np} + \dots + I_{nn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-19a)$$

Como una rama vincula entre sí sólo dos nudos, la intensidad de cada rama debe, necesariamente, entrar en esas ecuaciones dos veces, siendo

$$\begin{aligned} I_{12} &= -I_{21}, \\ I_{13} &= -I_{31}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

Por consiguiente, la suma de los primeros miembros de las n ecuaciones da idénticamente cero. En otras palabras, una de las n ecuaciones puede obtenerse de las restantes ($n-1$) y el número de las ecuaciones independientes basadas en la primera ley de Kirchhoff será igual a $(n-1)$, es decir, al número de nudos menos uno. Por ejemplo, para el esquema de la figura 1-19, que tiene cuatro nudos:

$$\left. \begin{aligned} \text{para el nudo 1} \quad I_1 + I_2 + I_3 &= 0; \\ \text{para el nudo 2} \quad -I_3 - I_4 + I_6 &= 0; \\ \text{para el nudo 3} \quad -I_1 - I_6 + I_5 &= 0; \\ \text{para el nudo 4} \quad -I_2 + I_4 - I_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

Sumando estas ecuaciones, obtenemos una identidad: $0 = 0$; por lo tanto, de las cuatro, sólo tres son independientes.

Como no puede producirse acumulación de electricidad en los distintos nudos de la red eléctrica ni en cualquiera de sus partes limitadas por superficies cerradas, la primera ley de Kirchhoff puede aplicarse no sólo a cualquier nudo, sino también a cualquier superficie cerrada.

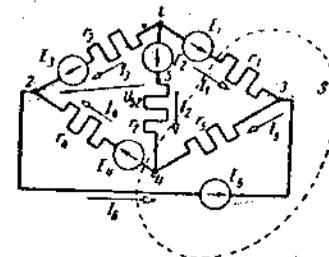


Fig. 1-19

Por ejemplo, para la superficie S (fig. 1-19) que pareciera seccionar el esquema eléctrico en dos partes, tenemos $I_4 - I_1 - I_2 - I_6 = 0$,

que también se puede obtener de las ecuaciones (1-21) para los nudos 3 y 4.

Para establecer el número de ecuaciones mutuamente independientes, basadas en la segunda ley de Kirchhoff, escribiremos para las m ramas del esquema (fig. 1-18), m ecuaciones que obedezcan a la ley de Ohm:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= r_{21}I_{21} - E_{21}; \\ \varphi_3 - \varphi_1 &= r_{31}I_{31} - E_{31}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \varphi_p - \varphi_1 &= r_{p1}I_{p1} - E_{p1}; \\ \dots & \dots \dots \dots \\ \varphi_p - \varphi_n &= r_{pn}I_{pn} - E_{pn}, \end{aligned} \right\} \quad (1-20 a)$$

donde r_{pn} es la resistencia de la rama que une los nudos p y n .

E_{pn} es la f.e.m. total que actúa en la rama pn en el sentido dirigido de p a n ;

φ_p y φ_n son los potenciales de los nudos p y n .

En esas ecuaciones el número total de incógnitas —intensidades de m ramas y potenciales de n nudos— es igual a $(m + n)$.

Sin modificar las condiciones del problema, se puede tomar el potencial de uno de los nudos igual a cualquier valor, y en particular a cero.

Si del sistema de m ecuaciones (1-20, a) se eliminan los $(n - 1)$ potenciales aún desconocidos, el número de ecuaciones se reducirá a $(m - n + 1)$. Pero al eliminar los potenciales de las ecuaciones (1-20, a) se llega a ecuaciones que vinculan las f.e.m. con las tensiones existentes en las resistencias, esto es, a ecuaciones basadas en la segunda ley de Kirchhoff.

De manera que el número de ecuaciones mutuamente independientes que se desprenden de la segunda ley de Kirchhoff, es igual a $(m - n + 1)$.

A título de ejemplo, escribamos las ecuaciones que relacionan los potenciales de los nudos con las tensiones y las f.e.m. que actúan en las ramas, para el esquema de la fig. 1-19:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= r_3I_3 - E_3; \\ \varphi_1 - \varphi_3 &= r_1I_1 - E_1; \\ \varphi_1 - \varphi_4 &= r_2I_2 - E_2; \\ \varphi_4 - \varphi_2 &= r_4I_4 - E_4; \\ \varphi_3 - \varphi_4 &= r_5I_5; \\ \varphi_2 - \varphi_3 &= -E_6. \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

Sumando las ecuaciones tercera y cuarta y restando dicha suma de la primera, tendremos:

$$E_2 + E_4 - E_3 = r_4I_4 + r_2I_2 - r_3I_3. \quad (1-23)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff (1-20) al circuito cerrado 1-4-2-1 (al recorrerlo en el sentido del movimiento de las agujas del reloj) obtenemos la misma ecuación.

De manera análoga obtendremos las ecuaciones para las restantes mallas cerradas:

$$\left. \begin{aligned} \text{para la malla } 1-3-2-1 \\ E_1 - E_3 - E_2 = r_1I_1 - r_3I_3; \\ \text{para la malla } 2-3-4-2 \\ E_6 + E_4 = r_5I_5 + r_4I_4. \end{aligned} \right\} \quad (1-24)$$

La solución simultánea de tres ecuaciones cualesquiera de las (1-21) y de las ecuaciones (1-23) y (1-24) nos da los valores de las intensidades en todas las ramas del esquema eléctrico de la figura 1-19.

Si de estas ecuaciones se obtiene una intensidad con signo negativo, ello significa que su sentido real es contrario al que se tomó como positivo.

Al establecer las ecuaciones de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, conviene prestar especial atención al hecho de que las ecuaciones sean mutuamente independientes. A tal efecto, es imprescindible elegir los circuitos de tal modo que cada nueva malla cuya ecuación se establece, no se pueda obtener de otras por eliminación de ramas comunes. Así, por ejemplo, la malla 1-3-4-2-1 (fig. 1-19) puede obtenerse de las 1-3-2-1 y 2-3-4-2 eliminando la rama 2-3. Por lo tanto, la ecuación para la malla 1-3-4-2-1 se puede obtener de las ecuaciones (1-24) sumándolas.

Puede aplicarse la segunda ley de Kirchhoff para determinar la tensión entre dos puntos cualesquiera del esquema. En tal caso, es necesario introducir en el miembro de la derecha de las ecuaciones (1-20), en forma de sumando, la tensión buscada, en un trayecto que cierre virtualmente el circuito abierto. Por ejemplo, para determinar la tensión U_{52} (fig. 1-19) se puede escribir la ecuación para el circuito 2-1-5-2

$$E_2 - E_3 = U_{52} - r_3I_3$$

o para el circuito 5-4-2-5

$$E_1 = r_2I_2 + r_4I_4 - U_{52},$$

de donde es fácil hallar la tensión buscada.

Para caracterizar de una manera completa el estado eléctrico de una red hay que conocer no sólo las tensiones e intensidades, sino también las potencias de las fuentes y de los receptores. De acuerdo

a la ley de conservación de energía, en un circuito eléctrico cerrado, la energía desarrollada por las fuentes es igual a la energía absorbida por los receptores. De esa proposición se desprende que en cualquier esquema eléctrico, la suma algebraica de potencias desarrolladas por las fuentes de f.e.m. es igual a la suma de potencias consumidas por todas las resistencias (incluso las resistencias internas de las fuentes de energía).

$$\sum_{h=1}^{h=m} E_h I_h = \sum_{h=1}^{h=m} r_h I_h^2 \quad (1-25)$$

Si el sentido real de la f.e.m. y el de la corriente en una rama, coinciden, la potencia de la fuente de f.e.m. entra en la ecuación (1-25) con signo positivo y la fuente entrega energía al circuito (trabaja en régimen de generador). Si el sentido de la f.e.m. y el de la corriente son opuestos, la potencia de la fuente de f.e.m. se anota en la ecuación (1-25) con signo negativo; dicha fuente absorberá energía proveniente de otras fuentes del circuito (trabaja en régimen de carga).

Es necesario señalar que la ecuación (1-25) puede obtenerse también de las leyes de Kirchhoff (1-19) y (1-20). Las correlaciones fundamentales entre las leyes de conservación de energía y las leyes de Kirchhoff, fueron establecidas por N. P. Sluginov (B.3).

Problema 1-3. Para regular la tensión U en los bornes de un receptor de resistencia $r = 200 \Omega$, se conectó un reductor de tensiones cuya resistencia total es $r_0 = 1200 \Omega$ (fig. 1-20). Construir un gráfico de las tensiones U en función de la resistencia r_x del reductor para valores de la misma que varían de cero a r_0 , siendo $U_0 = 220 \text{ V}$.

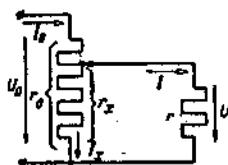


Fig. 1-20

Solución. De acuerdo a las leyes de Kirchhoff, tenemos para este esquema las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} U_0 &= I_x + I; \\ U_0 &= (r_0 - r_x)I_0 + r_x I_x; \\ r_x I_x &= rI = U. \end{aligned}$$

La solución simultánea de esas ecuaciones, nos da:

$$U = U_0 \frac{r}{(r_0 - r_x) + \frac{r_0 r}{r_x}} = \frac{44000}{(1200 - r_x) + \frac{24 \cdot 10^4}{r_x}}$$

Dando valores numéricos a la resistencia r_0 , obtenemos los valores correspondientes de la tensión U y construimos el gráfico $U(r_x)$ (fig. 1-21).

Problema 1-4. Para sumar eléctricamente cantidades se suele utilizar el esquema que muestra la figura 1-22. La cantidad resultante se obtiene en forma de tensión U en la resistencia r . Determinar el coeficiente de la escala que está

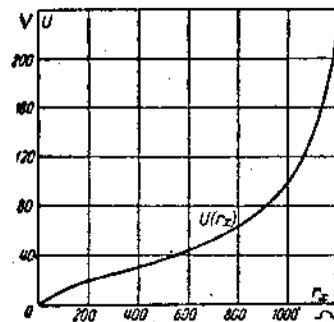


Fig. 1-21

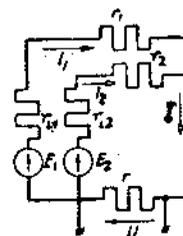


Fig. 1-22

de la relación entre la tensión U y la suma de las cantidades, dadas en forma de f.e.m. E_1 y E_2 .

Solución. De acuerdo a las leyes de Kirchhoff tenemos para el esquema las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} I - I_1 - I_2 &= 0; \\ E_1 &= (r_{11} + r_1)I_1 + rI; \\ E_2 &= (r_{11} + r_2)I_2 + rI. \end{aligned}$$

La solución simultánea de esas ecuaciones nos da:

$$I = \frac{\frac{E_1}{r_{11} + r_1} + \frac{E_2}{r_{12} + r_2}}{1 + \frac{r}{r_{11} + r_1} + \frac{r}{r_{12} + r_2}}$$

$$U = rI = \frac{r}{1 + \frac{r}{r_{11} + r_1} + \frac{r}{r_{12} + r_2}} \cdot \left(\frac{E_1}{r_{11} + r_1} + \frac{E_2}{r_{12} + r_2} \right)$$

Si tomamos $r_1 + r_{11} = r_2 + r_{12} = r_0$ entonces

$$U = \frac{r}{1 + \frac{r}{r_0} + \frac{r}{r_0}} (E_1 + E_2) = \frac{1}{2 + \frac{r_0}{r}} (E_1 + E_2) = k(E_1 + E_2),$$

donde $k = \frac{1}{2 + \frac{r_0}{r}}$ es el coeficiente buscado.

Problema 1-5. Aplicando las leyes de Kirchhoff, escribir dos expresiones de la intensidad I_0 para la rama que contiene el galvanómetro (fig. 1-23) suponiendo conocida la intensidad I , en un caso, y en el otro, la tensión U .

Solución. De acuerdo a las leyes de Kirchhoff, tenemos, para el esquema dado con seis intensidades desconocidas, las ecuaciones siguientes:

$$\text{para el nudo 1} \quad I_1 + I_3 - I = 0;$$

$$\text{para el nudo 2} \quad I_2 + I_0 - I_1 = 0;$$

$$\text{para el nudo 3} \quad I - I_2 - I_4 = 0;$$

$$\text{para el circuito 1-2-4-1} \quad 0 = r_1 I_1 + r_0 I_0 - r_3 I_3;$$

$$\text{para el circuito 2-3-4-2} \quad 0 = r_2 I_2 - r_4 I_4 - r_0 I_0;$$

$$\text{para el circuito 1-4-3-1} \quad U = r_3 I_3 + r_4 I_4 = r_1 I_1 + r_2 I_2 = E - r_1 I.$$

Resolviendo simultáneamente esas ecuaciones, obtendremos la expresión de la intensidad I_0 en función de la tensión U :

$$I_0 = U \frac{r_2 r_3 - r_1 r_4}{r_0 (r_1 + r_2) (r_3 + r_4) + r_1 r_2 (r_3 + r_4) + r_3 r_4 (r_1 + r_2)}$$

y en función de la intensidad I :

$$I_0 = I \frac{r_2 r_3 - r_1 r_4}{r_0 (r_1 + r_2 + r_3 + r_4) + (r_1 + r_3) (r_2 + r_4)}$$

Problema 1-6. Con qué error se determinará la intensidad en la rama del galvanómetro (fig. 1-23) si se sustituye la fuente de energía por una fuente de f.e.m. con $E = 12 \text{ V}$, $r_1 = 0,06 \Omega$, $r_2 = 5 \Omega$, $r_3 = 10 \Omega$, $r_4 = 5 \Omega$ y $r_0 = 10 \Omega$.

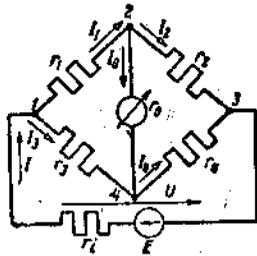


FIG. 1-23

Solución. Si se desprecia la caída de tensión en la resistencia interna r_1 de la fuente de energía, entonces la tensión U' en los bornes 1-3 será igual a la f.e.m., es decir

$$U' = E = 12 \text{ V}.$$

La intensidad I_0 en la rama del galvanómetro, al igual que las intensidades en las demás ramas, sufrirá un aumento de $\frac{E}{U}$ veces

De las ecuaciones del problema anterior, hallaremos:

$$U = 11,88 \text{ V} \quad \text{y} \quad I_0 = 0,125 \text{ A}.$$

Entonces

$$\frac{E}{U} = 1,01$$

$$I_0' = I_0 \cdot 1,01 = 0,125 \cdot 1,01 \approx 0,126 \text{ A}.$$

es decir, prácticamente la intensidad sigue siendo la misma.

1-7. Método de los nudos.

Como se sabe, el estado eléctrico de cualquier circuito queda enteramente definido con las ecuaciones basadas en la primera y en la segunda ley de Kirchhoff, debiéndose formar y resolver un sistema de ecuaciones con m incógnitas para determinar las intensidades en las m ramas. Demostraremos que en el estudio de los circuitos lineales, se puede reducir el número de ecuaciones, aplicando el *método de los potenciales de nudo (método de los nudos)*, basado en la primera ley de Kirchhoff y en la ley de Ohm (1-12).

Para comprender lo esencial del método examinemos el esquema eléctrico que muestra la figura 1-24.

Tomemos el potencial de uno de los nudos, por ejemplo del nudo 3, igual a cero: $\varphi_3 = 0$. Esa hipótesis no modifica las condiciones del problema ya que las intensidades en las ramas no dependen del valor de los potenciales en los nudos, sino de las diferencias de potenciales en los bornes de las ramas.

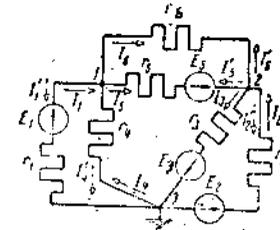


FIG. 1-24

De acuerdo a la primera ley de Kirchhoff y habiéndose elegido el sentido positivo de las corrientes, tendremos para los nudos 1 y 2:

$$\left. \begin{aligned} I_3 - I_4 - I_1 + I_6 &= 0; \\ -I_3 - I_6 - I_2 + I_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-26)$$

Según la ley de Ohm, las intensidades de las corrientes en las ramas (1-12) serán:

$$\left. \begin{aligned} I_6 &= (\varphi_1 - \varphi_2)g_6; \\ I_1 &= (-\varphi_1 + E_1)g_1; \\ I_4 &= -\varphi_1g_4; \\ I_5 &= (\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5; \\ I_2 &= (-\varphi_2 + E_2)g_2; \\ I_3 &= (\varphi_2 + E_3)g_3. \end{aligned} \right\} \quad (1-27)$$

donde φ_1 y φ_2 son los potenciales de los nudos 1 y 2.
Sustituyendo las (1-27) en las (1-26) y reagrupando los términos tendremos:

$$\begin{aligned} \varphi_1(g_6 + g_5 + g_4 + g_1) - \varphi_2(g_6 + g_5) &= E_1g_1 - E_5g_5; \\ -\varphi_1(g_6 + g_5) + \varphi_2(g_6 + g_5 + g_2 + g_3) &= E_5g_5 + E_2g_2 - E_3g_3, \end{aligned}$$

o también

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1g_{11} - \varphi_2g_{12} &= \sum_1 Eg; \\ -\varphi_1g_{21} + \varphi_2g_{22} &= \sum_2 Eg. \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

donde

$$g_{11} = g_6 + g_5 + g_4 + g_1$$

y

$$g_{22} = g_6 + g_5 + g_2 + g_3$$

son las sumas de las conductancias de las ramas que se reúnen en los nudos 1 y 2.

$g_{12} = g_{21} = g_6 + g_5$ es la suma de las conductancias de las ramas que unen los nudos 1 y 2.

El segundo miembro de cada una de las ecuaciones (1-28) representa la suma algebraica de los productos de las f.e.m. de las fuentes, por las conductancias correspondientes, para las ramas que concurren al nudo considerado. El producto de la forma Eg se toma con signo positivo, cuando la f.e.m. se dirige hacia el nudo y con signo negativo cuando se aleja de él.

Demostremos que las ecuaciones (1-28) se pueden establecer independientemente del sentido positivo elegido para las intensidades en las ramas.

Analicemos nuevamente el esquema de la figura 1-24 y demos el sentido positivo a las intensidades de las corrientes que se alejan del nudo.

Para los nudos 1 y 2, tenemos

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_4 + I_5 + I_6 &= 0; \\ I_2 + I_3 + I_5 + I_6 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

Haciendo, como antes $\varphi_3 = 0$, obtendremos para las intensidades de las ramas, las expresiones siguientes:

para el nudo 1

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (\varphi_1 - E_1)g_1; \\ I_4 &= \varphi_1g_4; \\ I_5 &= (\varphi_1 - \varphi_2 + E_5)g_5; \\ I_6 &= (\varphi_1 - \varphi_2)g_6; \end{aligned} \right\}$$

para el nudo 2

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= (\varphi_2 - E_2)g_2; \\ I_3 &= (\varphi_2 + E_3)g_3; \\ I_5 &= (\varphi_2 - \varphi_1 - E_5)g_5; \\ I_6 &= (\varphi_2 - \varphi_1)g_6. \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

Sustituyendo las (1-30) en las (1-29) y agrupando términos, obtenemos ecuaciones que coinciden enteramente con las (1-28).

Si el esquema eléctrico no sólo contiene fuentes de f.e.m. sino también fuentes de intensidad, las intensidades de estas últimas también entrarán en las ecuaciones establecidas de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff.

Al formar las ecuaciones del tipo (1-28) es necesario tomar en cuenta las intensidades de las fuentes de intensidad para cada nudo, en forma de sumando en el segundo miembro, debiendo tomarse con signo positivo las corrientes que afluyen al nudo y con sentido negativo las que se alejan de él.

De ese modo se pueden escribir las ecuaciones para determinar los potenciales en los nudos de un circuito eléctrico cualquiera, partiendo de su configuración, sin proponerse un sentido positivo de la corriente; el potencial de uno de los nudos debe tomarse igual a cero.

Si el esquema eléctrico contiene $(n+1)$ nudos, haciendo, por ejemplo, el potencial del nudo $(n+1)$ igual a cero, tendremos para los n nudos restantes, n ecuaciones



$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} - \dots - \varphi_p g_{1p} - \dots - \varphi_n g_{1n} &= \sum_1 E_g + J_1; \\ -\varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} - \dots - \varphi_p g_{2p} - \dots - \varphi_n g_{2n} &= \sum_2 E_g + J_2; \\ \dots &\dots \\ \varphi_1 g_{p1} - \varphi_2 g_{p2} - \dots + \varphi_p g_{pp} - \dots - \varphi_n g_{pn} &= \sum_p E_g + J_p; \\ \dots &\dots \\ -\varphi_1 g_{n1} - \varphi_2 g_{n2} - \dots - \varphi_p g_{np} - \dots + \varphi_n g_{nn} &= \sum_n E_g + J_n. \end{aligned} \right\} (1-31)$$

En estas ecuaciones, del mismo modo que en las (1-23) la conductancia del tipo g_{pp} (con dos subíndices iguales) representa la suma de las conductancias de las ramas que concurren en el nudo p y la conductancia $g_{np} = g_{pn}$ (con dos subíndices distintos) es igual a la suma de las conductancias de las ramas que unen los nudos estudiados n y p . El segundo miembro de cada una de las ecuaciones contiene las sumas algebraicas de los productos de las f.e.m. por las conductancias $\sum_p E_g$ correspondientes a todas las ramas que concurren al nudo p , y la intensidad del nudo J_p igual a la suma algebraica de las intensidades de todas las fuentes de intensidad conectadas con el mismo nudo p .

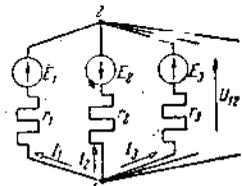


FIG. 1-25

Conviene recordar que la suma de todas las intensidades de nudo, como se desprende de la primera ley de Kirchhoff, es siempre igual a cero para las superficies cerradas. Pueden incluirse entre las intensidades de nudo, las intensidades ya conocidas de cualquier rama. Las conductancias de esas ramas no figuran en las expresiones g_{pp} y g_{np} (ver problema 1-7).

Resolviendo las ecuaciones (1-31) se pueden determinar los potenciales de n nudos y conociéndolos, es fácil hallar las intensidades en todas las ramas, aplicando la ley de Ohm (1-12).

Supongamos que entre dos nudos 1 y 2 están conectadas m ramas (fig. 1-25). De acuerdo a las ecuaciones (1-31) tenemos para el primer nudo:

$$\begin{aligned} \varphi_1 (g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_m) - \\ - \varphi_2 (g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_m) &= \sum_{h=1}^{h=m} E_h g_h, \end{aligned} \quad (1-32)$$

de donde

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\sum_{h=1}^{h=m} E_h g_h}{\sum_{h=1}^{h=m} g_h} \quad (1-33)$$

donde el numerador representa la suma algebraica de los productos de las f.e.m. por las conductancias correspondientes a todas las ramas (se toman con signo positivo las f.e.m. que actúan en dirección al nudo 1); el denominador es la suma aritmética de las conductancias de todas las ramas conectadas entre los nudos.

Problema 1-7. Para medir la velocidad del escurrimiento de gases se utiliza un aparato con termorresistencia, llamado termoanemómetro, siendo la termorresistencia r_t un hilo delgado de platino, que se conecta en el circuito de un puente (fig. 1-26).

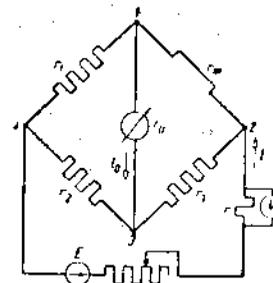


FIG. 1-26

El ensayo se realiza con intensidad constante I , cuyo valor se mide con un voltímetro unido a los bornes de una resistencia fija r . Determinar la velocidad del chorro de gases sabiendo que $I = 2$ A, $I_0 = 15$ mA, $r_1 = r_2 = 10$ Ω , $r_3 = 6$ Ω , la resistencia $r_0 = 100$ Ω ; la curva de graduación que muestra la relación entre la resistencia r_m y la velocidad del flujo gaseoso está dada en la figura 1-27.

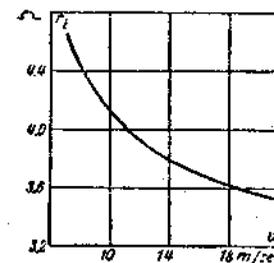


FIG. 1-27

Solución. Para resolver el problema nos serviremos del método de los potenciales de nudo. Hagamos el potencial del nudo 1 igual a cero y escribamos para los nudos 1, 3 y 4 las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\varphi_2 g_m - \varphi_4 g_1 &= -I_0; \\ -\varphi_2 g_3 + \varphi_3 (g_2 + g_3) - \varphi_4 g_2 &= I_0; \\ -\varphi_3 g_2 + \varphi_4 (g_1 + g_2) &= -I. \end{aligned}$$

Como el potencial $\varphi_3 = -r_0 I_0 = -100 \cdot 0,015 = -1,5$ V, haciendo en las dos últimas ecuaciones las sustituciones numéricas, obtenemos $\varphi_4 = -10,75$ V, $\varphi_2 = 3,96$ V y de la primera ecuación, $r_m = 3,62 \Omega$.

En la curva graduada encontramos la velocidad del gas, $v \approx 18$ m/seg.

1-8. Método de las intensidades de malla.

El cálculo de los circuitos eléctricos con elementos lineales puede reducirse a la solución simultánea de sólo $k = m - n + 1$ ecuaciones independientes establecidas de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, aplicando el método de las intensidades de malla. Automáticamente, la primera ley de Kirchhoff será satisfecha.

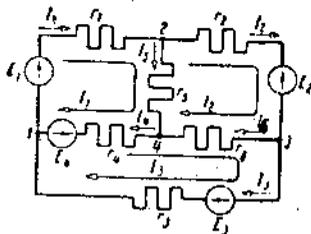


FIG. 1-28

Examinemos, a título de ejemplo, el esquema de la figura 1-28, que tiene seis ramas y cuatro nudos. Para establecer las ecuaciones de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, elegiremos los circuitos mutuamente independientes, de tal modo que una de las ramas de una determinada malla sólo forme parte de ésta y no de otra. Por ejemplo, en el esquema de la figura 1-28, las ramas primera, segunda y tercera sólo entran en los circuitos 1—2—4—1, 2—3—4—2 y 1—4—3—1, respectivamente.

Para el esquema de la figura 1-28 tenemos:

de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff

$$\left. \begin{aligned} I_1 - I_4 - I_3 &= 0; \\ I_5 + I_2 - I_1 &= 0; \\ I_6 + I_3 - I_2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (1-31)$$

de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff

$$\left. \begin{aligned} E_1 - E_4 &= r_1 I_1 + r_5 I_5 + r_4 I_4; \\ -E_2 &= r_2 I_2 + r_6 I_6 - r_3 I_3; \\ E_4 + E_3 &= r_3 I_3 - r_4 I_4 - r_6 I_6. \end{aligned} \right\} \quad (1-35)$$

Sirviéndonos de las ecuaciones (1-34) eliminemos de las (1-35) las intensidades I_4 , I_5 y I_6 que son comunes a varias mallas; obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} E_1 - E_4 &= (r_1 + r_4 + r_5) I_1 - r_5 I_2 - r_4 I_3; \\ -E_2 &= -r_5 I_1 + (r_2 + r_6 + r_5) I_2 - r_6 I_3; \\ E_3 + E_4 &= -r_4 I_1 - r_6 I_2 + (r_3 + r_4 + r_6) I_3. \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

Para ese mismo esquema se pueden elegir otras mallas mutuamente independientes; por ejemplo, en lugar del circuito 1—4—3—1 con la intensidad I_3 se puede elegir la malla 1—2—4—3—1. En tal caso, la intensidad real I_3 en la rama 2—4 será igual a la suma algebraica de tres intensidades:

$$I_3 = I_1 - I_2 + I_3.$$

De manera análoga se puede elegir, para el esquema de cualquier red de circuitos lineales, mallas independientes, de tal manera que una de las ramas de una malla determinada pertenezca a ella solamente. Si, luego, utilizando las ecuaciones basadas en la primera ley de Kirchhoff se eliminan de las ecuaciones formadas según la segunda ley de Kirchhoff, las intensidades de las ramas comunes a varias mallas, se obtiene finalmente un sistema de ecuaciones sólo con aquellas intensidades que no son comunes a dos o más mallas.

De acuerdo a las ecuaciones (1-36) se admite que cada una de las intensidades I_1 , I_2 , I_3 se cierra dentro de una sola malla y se las llama intensidades de malla. Las tensiones en las resistencias de cualquier malla se determinan por la suma algebraica de las tensiones, condicionadas por las intensidades de la malla propia y de las contiguas. Por ejemplo, en el circuito que contiene las resistencias r_1 , r_5 , y r_4 , la diferencia de f.e.m. $E_1 - E_4$ es igual a la suma de tres tensiones: la tensión debida a la propia intensidad de malla I_1 en todas las resistencias de ese circuito, y la debida a las intensidades I_2 e I_3 en las resistencias r_5 y r_4 respectivamente. Las intensidades reales en las ramas comunes a varias mallas se hallan sumando algebraicamente las intensidades de malla.

$$\left. \begin{aligned} I_4 &= I_1 - I_3; \\ I_5 &= I_1 - I_2; \\ I_6 &= I_2 - I_3. \end{aligned} \right\} \quad (1-37)$$

Del ejemplo dado, se deduce que, para determinar las intensidades de las ramas por ese método, basta con introducir en el cálculo las

intensidades de malla y establecer solamente las ecuaciones basadas en la segunda ley de Kirchhoff; el número de esas ecuaciones es menor que el de las intensidades desconocidas de las ramas en un número igual al de los nudos menos uno ($n-1$). Al sustituir las intensidades

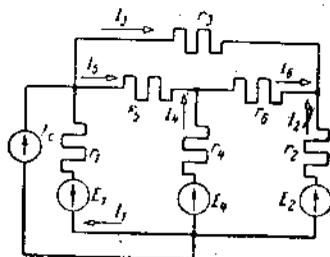


FIG. 1-29

de las ramas por las intensidades de malla, se satisface automáticamente la primera ley de Kirchhoff, ya que cada corriente de malla afluye por una de las ramas al nudo y por otra, se aleja de él. Por ejemplo, en el nudo 4 de la figura 1-28, según la primera ley de Kirchhoff, para las intensidades de las ramas tenemos:

$$I_4 - I_5 - I_6 = 0$$

y para las intensidades de malla

$$I_1 - I_3 - (I_1 - I_2) - (I_2 - I_3) = 0.$$

Si el esquema contiene no sólo f.e.m. sino también fuentes de intensidad, se admite que la corriente de estas últimas se cierra por las ramas de cualquier circuito abierto, que complete la rama con fuente de intensidad, cerrando el circuito. La caída de tensión debida a la intensidad de una fuente de ese tipo, en cada una de las resistencias de la malla, se toma en cuenta al escribirse el segundo miembro de las ecuaciones (1-36). Esas tensiones también pueden anotarse, con signo cambiado, en el primer miembro de las ecuaciones (1-36) en forma de f.e.m.

Analicemos, a título de ejemplo, el esquema de la figura 1-29. Según la segunda ley de Kirchhoff

$$E_1 - E_4 = r_1 I_1 + r_5 I_5 - r_4 I_4;$$

$$E_2 - E_4 = r_2 I_2 - r_6 I_6 - r_4 I_4$$

y

$$0 = r_3 I_3 - r_6 I_6 - r_5 I_5. \quad (1-38)$$

Aplicando la primera ley de Kirchhoff, eliminemos de esas ecua-

ciones las intensidades I_5 , I_4 e I_6 ; reagrupando términos tenemos como resultado

$$\left. \begin{aligned} E_1 - E_4 &= (r_1 + r_5 + r_4)I_1 - r_3 I_3 + r_4 I_2 + r_4 I_c + r_5 I_c; \\ E_2 - E_4 &= (r_2 + r_6 + r_4)I_2 + r_6 I_3 + r_4 I_1 + r_4 I_c; \\ 0 &= (r_3 + r_6 + r_5)I_3 + r_6 I_2 - r_3 I_1 - r_5 I_c. \end{aligned} \right\} (1-39)$$

De estas ecuaciones se deduce que en el caso analizado sucede como si la intensidad I_c se cerrara por las resistencias r_4 y r_5 , que forman con la rama que contiene a la fuente de intensidad I_c , un circuito cerrado.

Designando en las ecuaciones (1-39) las componentes de las tensiones $r_4 I_c$ y $r_5 I_c$ por E_{c4} y E_{c5} respectivamente, obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} E_1 - E_4 - E_{c4} - E_{c5} &= (r_1 + r_5 + r_4)I_1 + r_4 I_2 - r_3 I_3; \\ E_2 - E_4 - E_{c4} &= r_4 I_1 + (r_2 + r_6 + r_4)I_2 + r_6 I_3; \\ E_{c5} &= -r_5 I_1 + r_6 I_2 + (r_3 + r_6 + r_5)I_3. \end{aligned} \right\} (1-40)$$

A estas ecuaciones corresponde el esquema equivalente de la figura 1-30, en el cual la fuente de intensidad I_c está representada por las

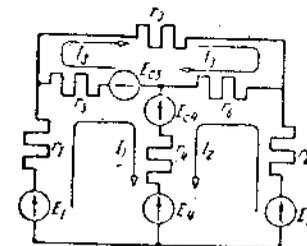


FIG. 1-30

f.e.m. $E_{c4} = r_4 I_c$ y $E_{c5} = r_5 I_c$; al mismo tiempo las intensidades en las resistencias r_4 y r_5 no son iguales a las intensidades que existen en las ramas correspondientes del esquema dado y se distinguen de ellas en un valor igual a I_c . En otras palabras, una vez determinadas las intensidades de malla I_1 , I_2 , I_3 , para poder hallar las intensidades I_4 e I_5 en las ramas del esquema dado (fig. 1-29), hay que recurrir a las expresiones $I_4 = -I_1 - I_2 - I_c$ e $I_5 = I_1 - I_3 + I_c$. Análogamente, se puede

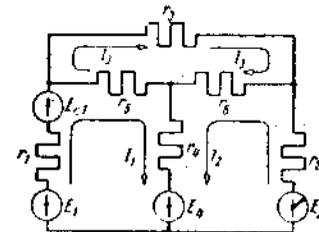


FIG. 1-31

demostrar que haciendo cerrar la corriente de intensidad, I_0 , sobre la rama de resistencia r_1 , el esquema equivalente será el de la figura 1-31, pero la intensidad de malla I_1 , en este esquema, no será igual a la intensidad real I_1 de la figura 1-29, sino que se diferenciará de ésta en un valor I_0 .

De modo que para calcular, por el método expuesto, los esquemas eléctricos con fuentes de f.e.m. y de intensidad, se puede reemplazar éstas últimas por fuentes equivalentes de f.e.m. y luego introducir las intensidades de malla, estableciendo finalmente, de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, el sistema de ecuaciones correspondientes. Las intensidades reales en las ramas que no contienen fuentes de f.e.m. equivalentes de las de intensidad, están dadas por la suma algebraica de las intensidades de malla solamente; en las ramas que contienen fuentes equivalentes de f.e.m., se consideran también las intensidades de las fuentes de intensidad. En lo sucesivo, estudiaremos solamente; salvo mención especial, circuitos eléctricos con fuentes de f.e.m.

Al calcular los circuitos eléctricos por el método expuesto, se tiene siempre a que el número de intensidades de malla que se cierran a través de cada rama, sea mínimo en lo posible.

Con ese objeto, cada circuito se elige, generalmente, en forma de célula (en la fig. 1-28 hay tres células con intensidades de malla I_1 , I_2 e I_3) siguiendo la regla indicada anteriormente respecto a la elección de mallas independientes para formar las ecuaciones basadas en la segunda ley de Kirchhoff.

En un esquema de configuración arbitraria, establezcamos correlaciones más generales, necesarias para las deducciones ulteriores, entre las intensidades de malla, las resistencias y las f.e.m. Para un esquema de k circuitos independientes, las ecuaciones, análogas a las (1-36) se escribirán del siguiente modo:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}I_1 + r_{12}I_2 + \dots + r_{1i}I_i + \dots + r_{1k}I_k &= E_1; \\ r_{21}I_1 + r_{22}I_2 + \dots + r_{2i}I_i + \dots + r_{2k}I_k &= E_2; \\ \dots &\dots \\ r_{i1}I_1 + r_{i2}I_2 + \dots + r_{ii}I_i + \dots + r_{ik}I_k &= E_i; \\ \dots &\dots \\ r_{k1}I_1 + r_{k2}I_2 + \dots + r_{ki}I_i + \dots + r_{kk}I_k &= E_k. \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

En estas ecuaciones, la resistencia del tipo r_{ii} (con dos subíndices iguales) se llama *resistencia propia del circuito i* , y la resistencia de la forma $r_{ik} = r_{ki}$ (con dos subíndices diferentes) se denominan *resistencia común* de los circuitos i y k . Los miembros de la derecha de las ecuaciones (1-41) son las *f.e.m. de malla*. Cada una de ellas, de la forma E_i es igual a la suma algebraica de las f.e.m. conectadas en las ramas de la malla.

Al elegir arbitrariamente el sentido positivo de las intensidades de

malla, se debe atribuir, en cada una de las ecuaciones (1-41), el mismo signo a las intensidades y a las f.e.m., cuyo sentido positivo coincide con el sentido de circulación elegido para el circuito correspondiente.

Resolviendo el sistema de ecuaciones (1-41), por medio de determinantes respecto a cualquiera de las intensidades I_l en el circuito l , obtendremos:

$$I_l = E_1 \frac{A_{l1}}{D} + E_2 \frac{A_{l2}}{D} + \dots + E_l \frac{A_{ll}}{D} + \dots + E_q \frac{A_{lq}}{D} + \dots + E_k \frac{A_{lk}}{D} \quad (1-42)$$

donde D es el determinante del sistema de ecuaciones (1-41), es decir:

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1i} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2i} & \dots & r_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{ii} & \dots & r_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{k1} & r_{k2} & \dots & r_{ki} & \dots & r_{kk} \end{vmatrix} \quad (1-43)$$

y $A_{l1}, A_{l2}, \dots, A_{lq}, \dots, A_{lk}$ son los complementos algebraicos del determinante D ; A_{lq} se obtiene de D suprimiendo en éste la columna l y la línea q , y multiplicando el determinante obtenido por $(-1)^{l+q}$. Señalamos que las resistencias del tipo r_{ii} y r_{ki} deben anotarse en las expresiones (1-43) con el mismo signo con el que figuran las tensiones correspondientes en (1-41).

Para resolver el problema general de cálculo de las intensidades en todas las ramas de una red de circuitos eléctricos lineales, ha de elegirse uno de los dos métodos fundamentales de cálculo: el método de los nudos o el método de las intensidades de malla.

Conviene utilizar el método de los potenciales de nudo cuando el número de nudos del esquema, disminuido en una unidad, es menor que el número de mallas independientes $(n-1) < k$, y el método de intensidades de malla, cuando $(n-1) > k$.

1-9. Principio de superposición.

Cada f.e.m. E_l , en la ecuación (1-42) representa la suma algebraica de las f.e.m. existentes en las ramas del circuito l . Si en la ecuación (1-42) se reemplazan todas las f.e.m. de malla por las sumas algebraicas de las f.e.m. de las ramas, reagrupando los términos, la expresión obtenida para I_l , será la suma algebraica de las intensidades componentes originadas por cada una de las f.e.m. del esquema por separado.

Al mismo tiempo, cada componente de la intensidad será igual al

producto de la f.e.m. por la suma algebraica de los coeficientes correspondientes de la forma $\frac{A}{D}$, que figuran en la ecuación (1-42).

Esta importante proposición lleva el nombre de *principio de superposición* y se desprende de la linealidad de las ecuaciones del estado eléctrico, establecidas para circuitos con elementos lineales. Debemos señalar que el principio de superposición sigue siendo cierto no sólo para las intensidades de malla I_1 , sino también para las intensidades I_k de ramas cualesquiera, puesto que se puede elegir de tal modo el conjunto de las mallas independientes, que la rama considerada entre en un solo circuito, es decir que la intensidad de malla I_1 sea igual a la intensidad real I_k .

A título de ejemplo que ilustre el principio de superposición, analicemos el esquema eléctrico de la figura 1-32 para el cual escribiremos las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}I_1 - r_{12}I_2 - r_{13}I_3 &= E_1; \\ -r_{21}I_1 + r_{22}I_2 - r_{23}I_3 &= E_2; \\ -r_{31}I_1 - r_{32}I_2 + r_{33}I_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1-44)$$

donde

$$\begin{aligned} r_{11} &= r_1 + r_5 + r_6; & r_{12} &= r_{21} = r_5; & r_{13} &= r_{31} = r_4; \\ r_{22} &= r_2 + r_6 + r_5; & r_{23} &= r_{32} = r_6; & r_{33} &= r_3 + r_4 + r_6; \\ E_1 &= E_{12} - E_{22}; & E_2 &= E_{23} + E_{12}. \end{aligned}$$

De las ecuaciones (1-44) tendremos

$$I_1 = E_1 \frac{A_{11}}{D} + E_2 \frac{A_{12}}{D}, \quad (1-45)$$

donde

$$D = \begin{vmatrix} r_{11} - r_{12} - r_{13} \\ -r_{21} & r_{22} - r_{23} \\ -r_{31} - r_{32} & r_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} r_{22} - r_{23} \\ -r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -r_{12} - r_{13} \\ -r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$$

Análogamente se determinan las intensidades I_2 e I_3 .

Sustituyendo en la expresión (1-45) las f.e.m. de malla por las f.e.m. de las ramas, obtenemos

$$I_1 = E_{12} \frac{A_{11}}{D} - E_{22} \frac{A_{11} - A_{12}}{D} + E_{23} \frac{A_{12}}{D},$$

de donde se deduce que la intensidad de malla I_1 está determinada por la suma algebraica de las intensidades componentes, producidas

por cada una de las f.e.m. por separado. Además esa intensidad de malla resulta ser la intensidad real de la rama de resistencia r_1 y f.e.m. E_{12} , ya que las otras intensidades de malla no se cierran sobre esa rama.

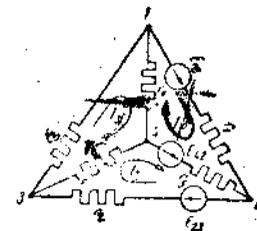


Fig. 1-32

De modo que, al determinar las intensidades de las ramas por medio del principio de superposición, se puede dejar sucesivamente en el esquema una sola fuente de f.e.m. por vez, considerando las restantes iguales a cero. Las intensidades reales de las ramas estarán dadas por la suma algebraica de las intensidades producidas por cada f.e.m. Si el esquema contiene no sólo fuentes de f.e.m., sino también fuentes de intensidad, entonces, al determinar por el principio de superposición las intensidades en las ramas, conviene hallar las componentes de las intensidades producidas por cada fuente de f.e.m. y por cada fuente de intensidad; después será fácil determinar las intensidades reales en las ramas sumando algebraicamente dichas componentes.

Como el principio de superposición se desprende de las propiedades generales de las ecuaciones lineales, se lo puede aplicar para determinar magnitudes físicas cualesquiera, ligadas entre sí por una relación lineal. En lo que se refiere a los circuitos eléctricos, se lo puede utilizar no sólo para determinar las intensidades en función de f.e.m. y resistencias dadas, sino también para determinar tensiones, partiendo de intensidades y resistencias conocidas. En cambio, dicho principio no puede servir para determinar las potencias de los receptores o de las fuentes de energía, dado que la potencia es una función cuadrática de las intensidades, de las tensiones o de las f.e.m.

1-10. Propiedad recíproca.

Usando el método de las intensidades de malla, se puede establecer otra propiedad importante de los circuitos eléctricos lineales, la *propiedad recíproca*, o, como también se le llama, *principio de reciprocidad*.

En esencia, esta propiedad consiste en lo siguiente: supongamos que en un esquema de configuración arbitraria, la única fuente de f.e.m. E_a , conectada sobre una rama de resistencia r_a , actúa desde el punto b al punto a (Fig. 1-33, a) y crea en la rama de resistencia r_1 una co-

fuente de intensidad I_l dirigida desde el punto d al punto c . Entonces, esa misma f.e.m. conectada sobre la rama de resistencia r_l y dirigida de d a c (fig. 1-33, *b*), creará, en la rama de resistencia r_q , una corriente de intensidad I_q dirigida de b a a e igual a la intensidad I_l .

En la figura 1-33, *a*, se muestran las ramas ab y cd que contienen las resistencias r_q y r_l ; el sector restante del esquema, sin fuentes de f.e.m. está representado convencionalmente por un rectángulo.

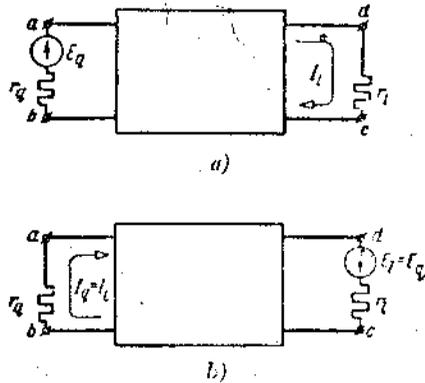


FIG. 1-33

Para demostrar la propiedad recíproca, nos serviremos de la expresión (1-42) que nos da la intensidad de una malla cualquiera. Supongamos que la rama cd forme parte de la malla l y que la rama ab pertenezca a otra malla q y supongamos que todas las f.e.m., excepto E_q , sean iguales a cero. Elijamos los circuitos de tal modo que las ramas ab y cd entren, cada una, en un solo circuito q y l respectivamente.

Entonces la intensidad I_l en el circuito l , que es justamente la intensidad de la rama dc , estará dada por la expresión:

$$I_l = E_q \frac{A_{lq}}{D} \quad (1-46)$$

Al transportar la f.e.m. E_q al circuito l (a la rama cd), la intensidad I_q en el circuito q , es decir, la intensidad en la rama ab se determinará por la expresión

$$I_q = E_l \frac{A_{ql}}{D} = E_q \frac{A_{ql}}{D} \quad (1-47)$$

El complemento algebraico de la forma A_{lq} se obtiene del determinante D , suprimiendo en él la columna l y la línea q y multiplicando el determinante obtenido por $(-1)^{l+q}$. A su vez, el complemento algebraico de la forma A_{ql} se obtiene del determinante D , suprimiendo en él la columna q y la línea l y multiplicando el determinante obtenido por $(-1)^{q+l}$. Como las resistencias comunes r_{ql} y r_{lq} son iguales entre sí,

es decir, $r_{lq} = r_{ql}$, $r_{23} = r_{32}$, etc., los complementos algebraicos A_{lq} y A_{ql} son también iguales entre sí y sólo se distinguen en que las líneas de A_{lq} son columnas de A_{ql} y viceversa. Por consiguiente, siendo las f.e.m. E_q y E_l iguales, las intensidades en las ramas cd (fig. 1-33, *a*) y ab (fig. 1-33, *b*), serán también iguales.

Señalemos que la propiedad recíproca puede deducirse también basándose en el método de los nudos.

1-11. Conductancias propias y mutuas de las ramas.

Basándonos en el principio de superposición, escribamos la ecuación de la intensidad en cualquier rama h de un circuito eléctrico lineal

$$I_h = E_1 g_{h1} + E_2 g_{h2} + \dots + E_h g_{hh} + \dots + E_m g_{hm} \quad (1-48)$$

En esta ecuación, formada según lo indicado en el punto 1-9, a diferencia de la ecuación (1-42), la intensidad I_h designa la intensidad de la rama h , mientras que E_1 y E_2 designan las f.e.m. de las ramas primera, segunda, etc., respectivamente.

En la ecuación (1-48) los coeficientes de las f.e.m. tienen las dimensiones de las conductancias. Llamemos a cada uno de los coeficientes afectados con dos subíndices iguales, de la forma g_{hh} , *conductancia propia o de entrada de la rama h* , y a cualquiera de los coeficientes afectados con dos subíndices distintos, g_{hm} , *conductancia mutua de las ramas h y m* .

Los valores numéricos de las conductancias propias y mutuas, pueden calcularse de la siguiente manera. Admitamos que en el esquema considerado todas las f.e.m., excepto E_h , sean iguales a cero. Entonces, la intensidad $I_h = E_h g_{hh}$, de donde

$$g_{hh} = \frac{I_h}{E_h} \quad (1-49)$$

Por consiguiente, la conductancia propia de cualquier rama está dada por la relación entre la intensidad y la f.e.m. de una misma rama cuando las f.e.m. en las demás ramas son nulas.

La f.e.m. E_h conectada sobre la rama h genera corrientes en todas las ramas y en particular en la rama m . La intensidad en la rama m se determina por una ecuación del tipo (1-48), es decir:

$$I_m = E_h g_{mh}$$

de donde

$$g_{mh} = \frac{I_m}{E_h} \quad (1-50)$$

Es necesario señalar que $g_{hm} = g_{mh}$, como se desprende del principio de reciprocidad.

De modo que: la conductancia mutua entre dos ramas cualesquiera está dada por la relación entre la intensidad de una rama y la f.e.m. de otra, siendo la f.e.m. en las ramas restantes igual a cero.

Las conductancias propias y mutuas pueden determinarse tanto por el cálculo como experimentalmente. Examinemos el cálculo de las conductancias mutuas y propias sobre el esquema de la figura 1-34, a. Igualemos a cero las f.e.m. E_2 y E_3 (fig. 1-34, b). Entonces, las intensidades en las ramas de ese esquema, serán:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{E_1}{r_1 + \frac{r_2 r_3}{r_2 + r_3}} = \frac{E_1 (r_2 + r_3)}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1} = E_1 \frac{r_2 + r_3}{D} \\ I_2 &= E_1 \frac{r_3}{D}; \quad I_3 = E_1 \frac{r_2}{D} \end{aligned} \right\} (1-51)$$

donde

$$D = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1.$$

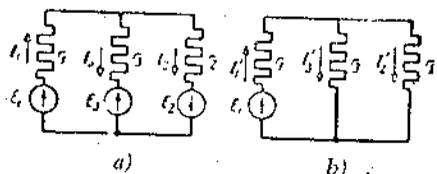


Fig. 1-34

Utilizando las expresiones (1-49), (1-50) y (1-51), determinamos:

$$g_{11} = \frac{I_1}{E_1} = \frac{r_2 + r_3}{D};$$

$$g_{21} = \frac{I_2}{E_1} = \frac{r_3}{D};$$

$$g_{31} = \frac{I_3}{E_1} = \frac{r_2}{D}.$$

Análogamente se calculan las conductancias propias y mutuas de la segunda y de la tercera rama:

$$g_{22} = \frac{r_1 + r_3}{D};$$

$$g_{33} = \frac{r_2 + r_1}{D};$$

$$g_{23} = \frac{r_1}{D} = g_{32};$$

$$g_{12} = g_{21};$$

$$g_{13} = g_{31}.$$

De las expresiones obtenidas se deduce que para el esquema de la figura 1-34 las conductancias propias y mutuas de las ramas, están ligadas entre sí por las relaciones

$$g_{21} = g_{21} + g_{31};$$

$$g_{22} = g_{12} + g_{32};$$

$$g_{33} = g_{13} + g_{23}.$$

Aplicando el principio de superposición y utilizando las conductancias mutuas es fácil determinar las intensidades en todas las ramas del esquema de la figura 1-34, a:

$$I_1 = E_1 (g_{21} + g_{31}) + E_2 g_{12} - E_3 g_{13};$$

$$I_2 = E_2 (g_{12} + g_{32}) + E_1 g_{21} + E_3 g_{23};$$

$$-I_3 = E_3 (g_{13} + g_{23}) - E_1 g_{31} + E_2 g_{32}.$$

En un caso general, la conductancia propia de una rama dada es igual a la suma de las conductancias mutuas entre dicha rama y cada una de las ramas restantes que concurren a uno de los dos nudos que limitan a la primera rama.

Por ejemplo, la conductancia propia g_{11} de la primera rama (fig. 1-35) es igual a la suma de las conductancias g_{13} y g_{12} ó g_{13} , g_{14} y g_{15} , es decir:

$$g_{11} = g_{13} + g_{12} = g_{13} + g_{14} + g_{15}.$$

Estas correlaciones derivan directamente de la primera ley de Kirchhoff y de la propiedad recíproca, y pueden ser aplicadas al cálculo de los circuitos eléctricos.

Por ejemplo, para determinar las intensidades I_1 , I_2 e I_3 (fig. 1-35) basta conocer las conductancias mutuas g_{12} , g_{23} y g_{31} , es decir:

$$I_1 = E_1 (g_{12} + g_{31}) - E_2 g_{12};$$

$$I_2 = E_2 (g_{12} + g_{23}) - E_1 g_{12};$$

$$I_3 = E_1 g_{31} + E_2 g_{23}.$$

Los signos de las componentes de cada una de las intensidades se toman de acuerdo al principio de superposición.

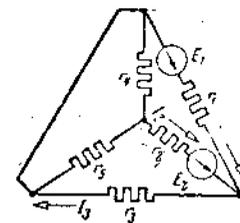


Fig. 1-35

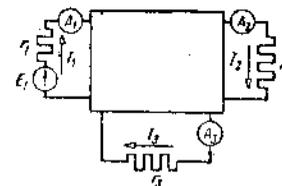


Fig. 1-36

Veamos ahora cómo se determinan las conductancias propias y mutuas experimentalmente; consideremos un esquema arbitrario que no contenga fuentes de f.e.m. ni fuentes de intensidad (fig. 1-36).

Se han destacado tres ramas del esquema; la parte restante está simbólicamente representada por un rectángulo. En cada rama se conectó un amperímetro. Para determinar la conductancia propia de la primera rama g_{11} , las conductancias mutuas de la primera y de la segunda g_{21} , y las de la primera y de la tercera g_{31} , conectemos en la primera rama la fuente de f.e.m. E_1 . Midiendo con un voltímetro la tensión $U_1 = E_1$ en los bornes de la fuente de f.e.m. y, con un amperímetro, las intensidades I_1 , I_2 e I_3 en las tres ramas, calcularemos sus conductancias

$$g_{11} = \frac{I_1}{U_1}; \quad g_{21} = \frac{I_2}{U_1}; \quad g_{31} = \frac{I_3}{U_1}.$$

Análogamente se determinan las conductancias propia y mutua de las ramas restantes.

Problema 1-8. Determinar las conductancias propias y mutuas de las ramas en el esquema de la figura 1-37 sabiendo que $r_1 = r_2 = r_3 = r_5 = 4 \Omega$ y $r_4 = 2 \Omega$.

Solución. Para determinar la conductancia propia g_{11} y las conductancias mutuas entre la primera rama y las restantes, igualemos las f.e.m. E_3 y E_5 a cero. Luego propongámonos una intensidad $I_1 = 1 \text{ A}$ en la resistencia r_1 , por ejemplo

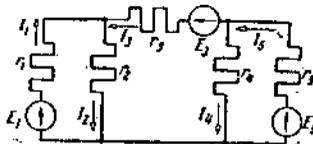


FIG. 1-37

y determinemos E_1 y las intensidades en las demás ramas. Como la resistencia $r_4 = r_5$, será $I_4 = I_5$, o $I_5 = I_4 + I_5 = 2 \text{ A}$. La tensión en los bornes de la resistencia r_2 es igual a:

$$U_2 = r_5 I_5 + r_3 I_3 = 4 + 4 = 8 \text{ V};$$

la intensidad

$$I_2 = \frac{U_2}{r_2} = \frac{8}{4} = 2 \text{ A};$$

la intensidad

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2 + 2 = 4 \text{ A}$$

y la f.e.m.

$$E_1 = U_2 + r_1 I_1 = 8 + 4 \cdot 4 = 24 \text{ V}.$$

La conductancia propia g_{11} de la primera rama es igual a la razón entre I_1 y E_1 , es decir:

$$g_{11} = \frac{I_1}{E_1} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} \frac{1}{\Omega}.$$

Las conductancias mutuas entre la primera rama y las restantes son

$$g_{12} = g_{21} = \frac{I_2}{E_1} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \frac{1}{\Omega};$$

$$g_{13} = g_{31} = \frac{I_3}{E_1} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \frac{1}{\Omega};$$

$$g_{14} = g_{41} = \frac{I_4}{E_1} = \frac{1}{24} \frac{1}{\Omega};$$

$$g_{15} = g_{51} = \frac{I_5}{E_1} = \frac{1}{24} \frac{1}{\Omega}.$$

Análogamente se determinan las conductancias mutuas y propias de las otras ramas:

$$g_{22} = g_{33} = g_{44} = g_{55} = \frac{1}{6} \frac{1}{\Omega};$$

$$g_{23} = g_{32} = \frac{1}{12} \frac{1}{\Omega};$$

$$g_{24} = g_{42} = g_{25} = g_{52} = \frac{1}{24} \frac{1}{\Omega};$$

$$g_{34} = g_{43} = g_{35} = g_{53} = \frac{1}{12} \frac{1}{\Omega};$$

y

$$g_{45} = g_{54} = \frac{1}{12} \frac{1}{\Omega}.$$

Problema 1-9. En las mismas condiciones del problema anterior, determinar las intensidades en todas las ramas, sabiendo que la f.e.m. $E_1 = 24 \text{ V}$, $E_3 = 12 \text{ V}$ y $E_5 = 24 \text{ V}$.

Solución. Conociendo las conductancias mutuas y propias de las ramas, determinaremos en ellas las intensidades, aplicando el principio de superposición, de acuerdo a las fórmulas:

$$I_1 = E_1 g_{11} + E_3 g_{13} + E_5 g_{15} = 24 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{12} + 24 \cdot \frac{1}{24} = 2 \text{ A};$$

$$I_2 = E_1 g_{21} + E_3 g_{23} + E_5 g_{25} = 24 \cdot \frac{1}{12} + 12 \cdot \frac{1}{12} + 24 \cdot \frac{1}{24} = 4 \text{ A};$$

$$I_3 = E_3 g_{33} + E_1 g_{31} + E_5 g_{35} = 12 \cdot \frac{1}{6} + 24 \cdot \frac{1}{12} + 24 \cdot \frac{1}{12} = 2 \text{ A};$$

$$I_4 = E_1 g_{41} - E_3 g_{43} + E_5 g_{45} = 24 \cdot \frac{1}{24} - 12 \cdot \frac{1}{12} + 24 \cdot \frac{1}{12} = 2 \text{ A};$$

$$I_5 = E_3 g_{53} + E_5 g_{55} - E_1 g_{51} = 24 \cdot \frac{1}{6} + 12 \cdot \frac{1}{12} - 24 \cdot \frac{1}{24} = 4 \text{ A}.$$

1-12. Teorema de compensación.

Destaquemos en un esquema eléctrico una rama de resistencia r_1 e intensidad I_1 (fig. 1-38, a).

Intercalamos en la rama de intensidad I_1 dos fuentes de f.e.m. E'_1 y E_1 (fig. 1-38, b) numéricamente iguales a la tensión $U_1 = r_1 I_1$. Las intensidades en todas las ramas del esquema, evidentemente permanecerán invariables.

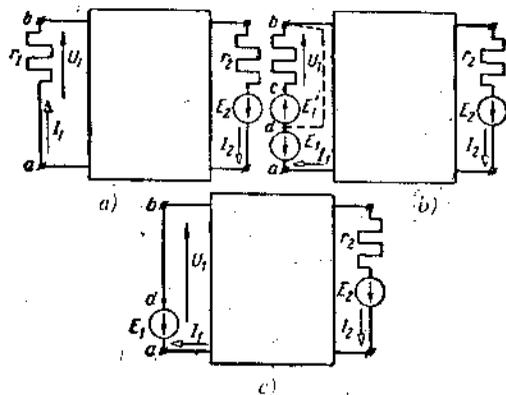


FIG. 1-38

Al pasar del punto d al punto c , el potencial aumenta en un valor $E'_1 = U_1$; al pasar del punto c al punto b , su valor disminuye en la misma cantidad o sea que en los puntos d y b existe un mismo potencial. Se pueden unir estos puntos con un conductor (poner en cortocircuito) como se ve en la figura 1-38, b (línea de puntos) es decir eliminar la fuente de f.e.m. $E'_1 = U_1$ y la resistencia r_1 del esquema, sin que varíen las intensidades en todas las ramas, como lo muestra la figura 1-38, c. Comparando los esquemas de las figuras 1-38, c y 1-38, a, se deduce que cualquier resistencia siempre puede ser reemplazada por una f.e.m. dirigida al encuentro de la corriente e igual en magnitud a la tensión existente en la resistencia. Este es el enunciado del *teorema de compensación*.

1-13. Correlaciones lineales entre las tensiones y las intensidades.

Destaquemos en el esquema de la figura 1-38, además de la rama que contiene a la resistencia r_1 , otra rama con la f.e.m. E_2 y la resistencia r_2 .

Escribamos las expresiones de las intensidades I_1 e I_2 para la rama del esquema de la figura 1-38, c, según el principio de superposición:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= -E_1 g_{11} + E_2 g_{12} + E_3 g_{13} + \dots; \\ I_2 &= -E_1 g_{21} + E_2 g_{22} + E_3 g_{23} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-52)$$

Supongamos que en el esquema 1-38, c varíe solamente la f.e.m. E_1 y que las f.e.m. restantes permanezcan invariables. Como las conductancias propias (g_{ab}) y mutuas g_{nm} no dependen del valor de la f.e.m. E_1 , haciendo,

$$E_2 g_{12} + E_3 g_{13} + \dots = \text{const} = a_1$$

y

$$E_2 g_{22} + E_3 g_{23} + \dots = \text{const} = a_2$$

podemos escribir

$$I_1 = -E_1 g_{11} + a_1; \quad I_2 = -E_1 g_{21} + a_2 \quad (1-53)$$

o, reemplazando en la (1-53) la f.e.m. E_1 por U_1 , obtendremos

$$I_1 = -U_1 g_{11} + a_1; \quad I_2 = -U_1 g_{21} + a_2 \quad (1-54)$$

Por el teorema de compensación, la variación de la f.e.m. E_1 en el esquema 1-38, c equivale a la de la tensión U_1 para una variación de la resistencia r_1 en el esquema inicial de la figura 1-38, a. Las conductancias g_{11} (propia) y g_{21} (mutua) permanecen invariables puesto que se obtienen del esquema 1-38, c para una resistencia $r_1 = 0$.

Por consiguiente, variando la resistencia r_1 , las intensidades I_1 e I_2 quedan ligadas con la tensión U_1 por una *relación lineal*.

Las constantes a_1 , a_2 , g_{11} y g_{12} pueden determinarse experimentalmente para cualquier régimen de la primera rama. Sin embargo resulta más sencillo y más práctico determinarlas considerando la primera rama en corto circuito y en régimen de circuito abierto.

Estando la primera rama en cortocircuito, $U_1 = 0$, las intensidades $I_1 = I_{c1} = a_1$ e $I_2 = I_{c2} = a_2$. Desconectando la primera rama, la intensidad $I_1 = 0$. Si la diferencia de potencial entre los puntos de ruptura es U_{v1} , y la intensidad $I_2 = I_{v2}$, tendremos de acuerdo a la (1-54)

$$0 = I_{c1} - U_{v1} g_{11};$$

$$I_{v2} = I_{c2} - U_{v1} g_{21};$$

de donde la conductancia propia

$$g_{11} = \frac{I_{c1}}{U_{v1}}$$

y la conductancia mutua será:

$$g_{21} = \frac{I_{c2} - I_{v2}}{U_{v1}}.$$



Sustituyendo los valores de las constantes en la primera de las ecuaciones (1-54), tendremos:

$$I_1 = I_{c1} \left(1 - \frac{U_1}{U_{v1}} \right) \quad (1-55)$$

Es necesario señalar que la variación de la tensión U_1 entre los límites $U_1 = 0$ y $U_1 = U_{v1}$ corresponde a una variación de la resistencia r_1 de cero a infinito.

Las intensidades I_1 e I_2 de las ramas estudiadas también están entre sí en una relación lineal. En efecto, de la solución simultánea de las ecuaciones (1-54) obtenemos:

$$I_2 = b_2 + b_1 I_1, \quad (1-56)$$

donde b_1 y b_2 son constantes que se determinan para dos regímenes cualesquiera de la primera rama o se calculan para valores dados de las conductancias propias o mutuas.

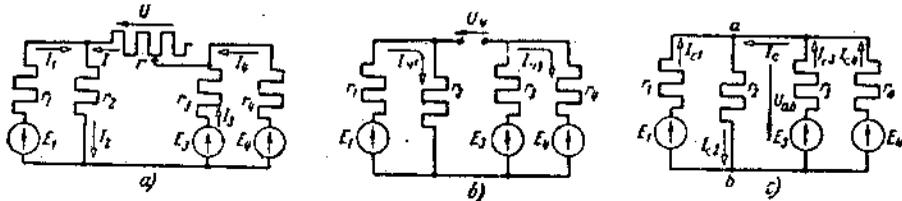


Fig. 1-39

Análogamente se puede demostrar que haciendo variar simultáneamente por cualquier procedimiento las tensiones e intensidades en dos ramas por ejemplo, la tensión o la intensidad en la tercera rama (designada por z) quedará determinada por una expresión lineal de la forma:

$$z = a + bx + cy,$$

donde a , b y c son constantes determinadas experimentalmente o por cálculo;

x e y son las intensidades o tensiones variables.

Problema 1-10. En la figura 1-39, *a* se representa un esquema con una resistencia r variable de cero a infinito. Hallar la relación entre la intensidad de cada rama y la tensión U en los bornes de la resistencia r , sabiendo que $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 4 \Omega$ y $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = 100$ V.

Solución. Hallemos los valores límites de la tensión U y de la intensidad I colocando la rama considerada en cortocircuito ($r = 0$) y en circuito abierto ($r = \infty$). Para $r = \infty$ la intensidad $I = 0$ y la tensión $U = U_v$. Para el esquema de la figura 1-39, *b*

$$E_3 = r_3 I_{v3} + U_v + r_2 I_{v1},$$

de donde

$$U_v = E_3 - r_3 I_{v3} - r_2 I_{v1}.$$

Como la intensidad

$$I_{v1} = \frac{E_1}{r_1 + r_2} = \frac{100}{8} = 12,5 \text{ A}$$

$$I_{v3} = \frac{E_3 - E_4}{r_3 + r_4} = 0 \quad (\text{fig. 1-39, } b),$$

entonces

$$U_v = 100 - 50 = 50 \text{ V.}$$

Para determinar la intensidad I_c (fig. 1-39, *c*) hallemos previamente la tensión en los bornes de las ramas paralelas por la fórmula

$$U_{ab} = \frac{E_1 g_1 + E_3 g_3 + E_4 g_4}{g_1 + g_2 + g_3 + g_4} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,25} = 75 \text{ V.}$$

Las intensidades en las ramas serán iguales a:

$$I_{c1} = (E_1 - U_{ab}) g_1 = (100 - 75) 0,25 = 6,25 \text{ A;}$$

$$I_{c2} = U_{ab} g_2 = 75 \cdot 0,25 = 18,75 \text{ A;}$$

$$I_{c3} = (E_3 - U_{ab}) g_3 = (100 - 75) 0,25 = 6,25 \text{ A;}$$

$$I_{c4} = (E_4 - U_{ab}) g_4 = (100 - 75) 0,25 = 6,25 \text{ A}$$

$$I_c = I_{c3} + I_{c4} = I_{c2} - I_{c1} = 12,5 \text{ A.}$$

La intensidad en cada rama varía linealmente en función de la tensión.

Hallemos la relación entre la intensidad I y la tensión U en los bornes de la resistencia r , formando la ecuación de una recta, $I = a + bU$. Para determinar los coeficientes a y b , usaremos los regímenes de marcha en vacío y de cortocircuito. Para $r = 0$, la tensión $U = 0$ y la intensidad $I = I_c = a = 12,5$ A; para $r = \infty$, $I = 0$, y $U = U_v$, entonces $0 = I_c + bU_v$; de donde

$$b = -\frac{I_c}{U_v} = -\frac{12,5}{50} = -0,25 \frac{1}{\Omega}.$$

Como resultado tenemos $I = 12,5 - 0,25 U$.

Hallemos la relación entre la intensidad I_1 de la primera rama y la tensión U formando la ecuación de una recta $I_1 = a_1 + b_1 U$.

Para determinar los coeficientes a_1 y b_1 recurriremos también en este caso a los regímenes de marcha en vacío y de cortocircuito.

Para $r = 0$ la tensión $U = 0$ y la intensidad $I_{c1} = 6,25$ A; para $r = \infty$ (fig. 1-39, *b*) $I_{v1} = I_{v2} = 12,5$ A.

A su vez $I_{c1} = I_{c1} + b_1 U_v$; de donde

$$b_1 = \frac{I_{v1} - I_{c1}}{U_v} = \frac{12,5 - 6,25}{50} = 0,125 \frac{1}{\Omega}.$$

Por consiguiente

$$I_1 = 12,5 + 0,125 U.$$

Análogamente se determinan las intensidades en las ramas restantes:

$$I_2 = 18,75 - 0,125 U$$

e

$$I_3 = I_4 = 6,25 - 0,125 U.$$

1-14. Teorema de los incrementos recíprocos de intensidades y tensiones.

Aplicando las ecuaciones (1-54) y (1-55) establezcamos la relación entre los incrementos de intensidad ΔI_1 , ΔI_2 y los incrementos de tensión ΔU_1 cuando la resistencia de la primera rama (fig. 1-38, a) varía de cero a Δr_1 .

Si $r_1 = 0$, la tensión $U_1 = 0$ y de acuerdo a la (1-54) $I_1 = a_1 = I_{c1}$; cuando la resistencia en la primera rama es Δr_1 , la tensión en sus bornes será $\Delta U_1 = \Delta r_1 I_1$ y la intensidad $I_1 = -\Delta U_1 g_{11} + I_{c1}$.

Por consiguiente, al hacer variar la resistencia de la primera rama en una cantidad Δr_1 , la variación de la intensidad será:

$$\Delta I_1 = I_{c1} - I_1 = \Delta U_1 g_{11} = \Delta r_1 I_1 g_{11}. \quad (1-57)$$

Análogamente se puede demostrar que el incremento de intensidad en la segunda rama para un incremento Δr_1 en la resistencia de la primera, será:

$$\Delta I_2 = \Delta U_1 g_{21} = \Delta r_1 I_1 g_{21}. \quad (1-58)$$

De las expresiones (1-57) y (1-58) es fácil deducir, para $\Delta r_1 \neq 0$, las conductancias propias y mutuas de las ramas, por la relación de los incrementos, es decir:

$$g_{11} = \frac{\Delta I_1}{\Delta U_1} \quad \text{y} \quad g_{21} = \frac{\Delta I_2}{\Delta U_1}.$$

De acuerdo a la (1-55) donde hay que reemplazar U_1 por ΔU_1 , tenemos

$$I_1 = I_{c1} \left(1 - \frac{\Delta U_1}{U_{c1}} \right) = I_{c1} \left(1 - \frac{\Delta r_1 I_1}{U_{c1}} \right) = I_{c1} - \Delta r_1 \frac{I_{c1}}{U_{c1}} I_1 = I_{c1} - \Delta r_1 g_{11} I_1$$

de donde

$$I_1 = \frac{I_{c1}}{1 + \Delta r_1 g_{11}}. \quad (1-59)$$

Sustituyendo el valor de I_1 de la (1-59), en las ecuaciones (1-57) y (1-58) obtenemos:

$$\Delta I_1 = \frac{I_{c1} \cdot \Delta r_1}{1 + \Delta r_1 g_{11}} \cdot g_{11}; \quad (1-60)$$

$$\Delta I_2 = \frac{I_{c1} \cdot \Delta r_1}{1 + \Delta r_1 g_{11}} \cdot g_{21}. \quad (1-61)$$

Las expresiones referentes a los incrementos de las intensidades (1-60), (1-61) constituyen el teorema de la variación (B. 4 y 5) o teorema de los incrementos recíprocos. Si la resistencia de la primera rama varía en una cantidad Δr_1 , pero no desde cero, sino desde r_1 hasta $r_1' = r_1 + \Delta r_1$, se pueden aplicar las mismas ecuaciones (1-60) y (1-61) para determinar los incrementos ΔI_1 y ΔI_2 . En ese caso las conductancias propia, g_{11} y mutua, g_{21} , como también la intensidad I_{c1} tendrán evidentemente otros valores que se determinarán, como antes, para $\Delta r_1 = 0$.

CAPÍTULO II

TRANSFORMACIONES DE LOS ESQUEMAS
ELECTRICOS LINEALES

2-1. Observaciones generales.

Para que resulte más fácil y más cómodo el cálculo y el estudio de los circuitos eléctricos compuestos, se suele recurrir a *transformaciones de los esquemas eléctricos*. Transformando convenientemente los esquemas eléctricos se puede disminuir el número de sus ramas o de sus nudos y el número de las ecuaciones que definen su estado eléctrico.

Analicemos, a título de ejemplo, el esquema de una línea trifilar (fig. 2-1, a). Sean dadas, las f.e.m. E_1 y E_2 y las resistencias internas r_{11} y r_{12} de las fuentes de energía, las resistencias de la línea r y r_0 y las cargas r_{12} , r_{23} y r_{13} .

Para determinar las intensidades en las seis ramas de ese esquema es necesario resolver, por el método de las intensidades de malla o por el de nudos, un sistema de ecuaciones con tres incógnitas.

Sin embargo se puede simplificar dicho esquema de tal modo que contenga, por ejemplo, sólo tres ramas con tres intensidades desconocidas y sólo dos nudos. Esto se puede lograr reemplazando las resistencias r_{12} , r_{23} y r_{13} , acopladas por sus bornes a los puntos 1, 2 y 3, por otras tres resistencias r_1 , r_2 , r_3 (fig. 2-1, b) que se conectan entre los puntos 1, 2 y 3 respectivamente y un cierto punto nodal nuevo O' . He-

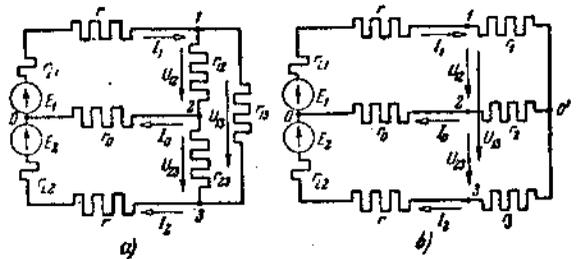


FIG. 2-1

cha la sustitución, las intensidades I_1 , I_2 e I_3 en las ramas que no fueron tocadas en la transformación, y las tensiones U_{12} , U_{23} y U_{13} entre los puntos 1, 2 y 3 deben seguir siendo las mismas que en el esquema dado.

En este esquema equivalente que tiene dos nudos el O y el O' es fácil encontrar la tensión entre los puntos nodales por la fórmula (1-33) y, luego, determinar las intensidades I_1 , I_2 e I_3 por la ley de Ohm. Una vez hecho esto se pueden determinar las tensiones U_{12} , U_{23} y U_{13} , entre los puntos 1, 2 y 3 y las intensidades I_{12} , I_{23} e I_{13} en las resistencias r_{12} , r_{23} y r_{13} del esquema dado, es decir, ya resulta fácil resolver el problema.

Siempre que se reemplaza un sistema eléctrico dado por otro equivalente de distinto tipo, debe cumplirse la condición de que permanezcan invariables las intensidades y las tensiones en las partes del esquema no afectadas por la transformación.

Si se transforma aquella parte del esquema que no contiene fuentes de f.e.m. en sus ramas, entonces, como se verá más adelante, la invariabilidad de las intensidades y de las tensiones en el sector restante del esquema, asegura la invariabilidad de la potencia consumida por las ramas. Si, en cambio, las ramas del sector transformado contienen f.e.m., la potencia total de las fuentes y de los receptores del esquema original no será igual a la potencia correspondiente del esquema equivalente.

Analicemos los casos más característicos y más frecuentes de transformación de esquemas eléctricos, sea que las ramas contengan fuentes de f.e.m. y de intensidad, o no las contengan.

2-2. Transformación de un esquema formado por resistencias en conexión mixta.

En la figura 2-2, a se muestra un esquema eléctrico que contiene una fuente de f.e.m. y cinco resistencias en conexión mixta (en paralelo y en serie).

Escribamos para este esquema las ecuaciones según el método de las intensidades de malla:

$$\left. \begin{aligned} E &= (r + r_1)I - r_1 I_1; \\ 0 &= (r_1 + r_2 + r_3)I_1 - r_1 I - r_3 I_2; \\ 0 &= (r_3 + r_4)I_2 - r_3 I_1. \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

Despejemos la intensidad I_2 de la tercera ecuación y sustituyámosla en la segunda. Como resultado obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \left(r_1 + r_2 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} \right) I_1 - r_1 I; \\ E &= (r + r_1)I - r_1 I_1. \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

Estas ecuaciones son satisfechas por el esquema equivalente de la figura 2-2, b, en el cual dos resistencias, r_3 y r_4 , fueron reemplazadas por una rama de resistencia $r_{34} = \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}$.

De este modo, una simple operación algebraica que consiste en eliminar la intensidad de malla I_2 de las ecuaciones fundamentales, nos da un esquema equivalente con dos intensidades de malla I e I_1 . En él ya no existe el circuito en cuyas ramas se cerraba la corriente de

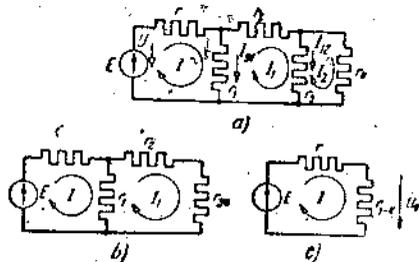


Fig. 2-2

intensidad I_2 . Las tensiones y las intensidades existentes en los tramos del esquema, que no intervienen en la transformación, no se modifican.

Eliminando la intensidad I_1 de las ecuaciones (2-2) obtenemos:

$$E = \left[r + \frac{r_1(r_2 + r_{34})}{r_1 + r_2 + r_{34}} \right] I = (r + r_{1-4})I, \quad (2-3)$$

donde:

$$r_{1-4} = \frac{r_1(r_2 + r_{34})}{r_1 + r_2 + r_{34}}$$

ecuación a la cual satisface el esquema equivalente de la figura 2-2, c. De aquí deducimos que para determinar la intensidad I , es necesario previamente, hallar la resistencia equivalente r_{1-4} , luego, aplicando la ley de Ohm, se tendrá:

$$I = \frac{E}{r + r_{1-4}}$$

Conociendo la intensidad I , es fácil hallar la tensión U_1 por la fórmula $U_1 = r_{1-4}I$, lo cual a su vez nos permite determinar las intensidades en las resistencias r_1 y r_2 por las fórmulas

$$I_{01} = I - I_1 = \frac{U_1}{r_1}$$

$$I_1 = \frac{U_1}{r_2 + r_{34}}$$

Análogamente se determinan las intensidades y tensiones en los tramos restantes del esquema de la figura 2-2, a.

“Envolviendo” así gradualmente el esquema dado y desenvolviéndolo” nuevamente se pueden hallar las intensidades en todas las ramas, sin resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones que definen el estado eléctrico del esquema.

Señalemos que el cálculo de un esquema con agrupamiento mixto de resistencias se puede efectuar por un método más sencillo, basado en la proporcionalidad entre la intensidad de cualquier rama y la tensión total en los bornes del circuito. A fin de ilustrar este método examinemos el esquema de la figura 2-2, a. Tomemos para I_2 un valor cualquiera, por ejemplo $I_2 = 1$ A.

Conociendo I_2 , hallems la tensión $U'_2 = r_1 I'_2$ en los bornes de las ramas paralelas que contienen a las resistencias r_3 y r_4 determinemos luego la intensidad I'_{12} en la resistencia r_3 y la intensidad I'_1 en la resistencia r_2 por las fórmulas:

$$I'_{12} = \frac{U'_2}{r_3};$$

$$I'_1 = I'_2 + I'_{12}.$$

La tensión en la resistencia r_1 es evidentemente igual a $U'_1 = U'_2 + r_2 I'_1$ y la intensidad $I'_{01} = \frac{U'_1}{r_1}$.

La intensidad I' en la parte no ramificada de la red es

$$I' = I'_{01} + I'_1$$

y la tensión U' en los bornes de todo el esquema

$$U' = U'_1 + rI'.$$

Como las intensidades en las ramas fueron halladas partiendo de un valor arbitrario $I_2 = 1$ A, la tensión obtenida U' será en general distinta de la dada U . Para determinar las intensidades reales en las ramas, evidentemente basta multiplicar los valores hallados por el cociente de las tensiones $\frac{U}{U'}$.

— Demostraremos que la potencia $r_{1-4}I^2$, absorbida por la resistencia equivalente r_{1-4} (fig. 2-2, c) es igual a la suma de las potencias, absorbidas por las resistencias r_1 , r_2 , r_3 y r_4 del esquema dado (fig. 2-2, a).

Representemos la potencia $r_{1-4}I^2$ de la resistencia equivalente r_{1-4} (fig. 2-2, c), bajo la forma $r_{1-4}I \cdot I = U_1 \cdot I$ y sustituyamos la tensión U_1 y la intensidad I por las expresiones (fig. 2-2, a) $U_1 = r_1 \cdot I_{01}$ e $I = I_{01} + I_1$; obtenemos entonces:

$$U_1 I = r_1 I_{01}^2 + U_1 I_1.$$

Transformemos el término $U_1 I_1$ sustituyendo primero la tensión U_1 (fig. 2-2, a) por la suma de tensiones $r_2 I_1 + r_3 I_{12}$ en los tramos, y luego la

intensidad I_1 por la suma de las intensidades $I_{12} + I_2$ en las ramas, hasta obtener la siguiente expresión

$$U_1 I_1 = r_2 I_{12}^2 + r_3 I_{12}^2 + r_4 I_{12}^2.$$

Como $r_3 I_{12} = r_4 I_2$,

será $r_3 I_{12} I_2 = r_4 I_2^2$.

De modo que tenemos finalmente:

$$r_{1-4} I^2 = r_1 I_{01}^2 + r_2 I_1^2 + r_3 I_{12}^2 + r_4 I_2^2,$$

que es lo que se quería demostrar.

2-3. Transformación recíproca de un triángulo y de una estrella de resistencias.

En la figura 2-3, a, se muestra la parte de un esquema eléctrico que tiene la forma de un triángulo cuyos vértices son los nudos y cuyos lados, las ramas. Un agrupamiento de resistencias de ese tipo, se llama conexión en *triángulo* (triángulo de resistencias).

Al transformar los esquemas eléctricos compuestos, suele presentarse la necesidad de sustituir el triángulo de resistencias por otro tipo de conexión, el de una estrella de tres puntas (fig. 2-3, b), en la cual uno de los extremos de cada resistencia concurre a un punto nodal común y los otros están conectados a los mismos nudos que en el triángulo (ver cap. 2-1). Se trata de una conexión en *estrella* (estrella de resistencias).

Para obtener las fórmulas de transformación de un triángulo en una estrella de resistencias, equivalente, escribamos las ecuaciones según el método de las intensidades de malla, para el esquema de la figura 2-3, a:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= r_{21}(I_{21} - I_0) + U_{12}; \\ 0 &= r_{32}(I_{32} - I_0) + U_{23}; \\ 0 &= r_{13}(I_{13} - I_0) + U_{31}; \\ 0 &= (r_{21} + r_{32} + r_{13})I_0 - r_{21}I_{21} - r_{32}I_{32} - r_{13}I_{13}, \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

donde I_{21} , I_{32} , I_{13} son las intensidades de las corrientes de malla que se cierran por las resistencias r_{21} , r_{32} y r_{13} , respectivamente; I_0 es la inten-

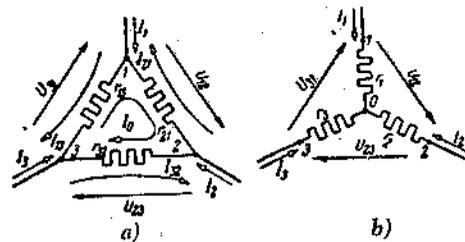


FIG. 2-3

sidad de la corriente de malla que se cierra dentro del triángulo. Despejando I_0 de la última ecuación y sustituyendo su valor en las tres anteriores obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{r_{21}r_{32}}{\Sigma r} I_2 - \frac{r_{13}r_{21}}{\Sigma r} I_1 + U_{12}; \\ 0 &= \frac{r_{32}r_{13}}{\Sigma r} I_3 - \frac{r_{21}r_{32}}{\Sigma r} I_2 + U_{23}; \\ 0 &= \frac{r_{13}r_{21}}{\Sigma r} I_1 - \frac{r_{32}r_{13}}{\Sigma r} I_3 + U_{31}, \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

donde

$$\Sigma r = r_{21} + r_{32} + r_{13},$$

e

$$I_1 = I_{13} - I_{21};$$

$$I_2 = I_{21} - I_{32};$$

$$I_3 = I_{32} - I_{13}$$

son las intensidades en las ramas que concurren a los nudos 1, 2 y 3 desde el exterior.

Mostraremos que el esquema equivalente (fig. 2-3, b), cuyas resistencias r_1 , r_2 y r_3 están conectadas en estrella, satisface a las ecuaciones (2-5). Para este esquema son válidas las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= r_2 I_2 - r_1 I_1 + U_{12}; \\ 0 &= r_3 I_3 - r_2 I_2 + U_{23}; \\ 0 &= r_1 I_1 - r_3 I_3 + U_{31}. \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

Las tensiones U_{12} , U_{23} y U_{31} y las intensidades I_1 , I_2 e I_3 , de acuerdo a las condiciones de equivalencia, deben tener los mismos valores correspondientemente en ambos esquemas (fig. 2-3, a y b). Como las condiciones de equivalencia se cumplen para valores cualesquiera de las tensiones y de las intensidades, deben ser iguales los coeficientes de los términos correspondientes de las ecuaciones (2-5) y (2-6), es decir que las resistencias de la estrella equivalente serán:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{r_{21}r_{13}}{r_{21} + r_{32} + r_{13}}; \\ r_2 &= \frac{r_{32}r_{21}}{r_{21} + r_{32} + r_{13}}; \\ r_3 &= \frac{r_{13}r_{32}}{r_{21} + r_{32} + r_{13}}. \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

De modo que la eliminación de la intensidad de malla I_0 del sistema de ecuaciones, formado para el esquema de la figura 2-3, a, nos da automáticamente las ecuaciones a las que satisface el esquema equivalente (fig. 2-3, b) en estrella, cuyas resistencias no forman un circuito cerrado para la corriente de intensidad I_0 .

Se puede demostrar que también en ese caso, la potencia total de las resistencias, en la estrella equivalente, es igual a la suma de las potencias de las resistencias en el triángulo dado.

Si, partiendo de las fórmulas (2-7), se expresan las resistencias, r_{21} , r_{32} , r_{13} en función de las r_1 , r_2 y r_3 , se obtendrán las fórmulas de transformación de una estrella de tres puntas en un triángulo equivalente.

$$\left. \begin{aligned} r_{21} &= r_1 + r_2 + \frac{r_1 r_2}{r_3}; \\ r_{32} &= r_2 + r_3 + \frac{r_2 r_3}{r_1}; \\ r_{13} &= r_3 + r_1 + \frac{r_3 r_1}{r_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

o, para las conductancias

$$g_{21} = \frac{g_1 g_2}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad g_{32} = \frac{g_2 g_3}{g_1 + g_2 + g_3}; \quad g_{13} = \frac{g_3 g_1}{g_1 + g_2 + g_3}. \quad (2-9)$$

Problema 2-1. En la figura 2-4 se muestra el esquema de un puente automático utilizado como elemento de medición en los dispositivos de regulación automática. Entre dos brazos del puente se conecta un alambre bien tenso, sobre el cual se desliza un cursor impulsado por el mecanismo reversible del dispositivo regulador. En cuanto el circuito del puente pierde el equilibrio, el cursor es desplazado mediante el mecanismo reversible en la dirección correspondiente, hasta nuevo equilibrio. De manera que, para cada valor de la magnitud no eléctrica, ligada funcionalmente con una resistencia del puente, por ejemplo con r_1 , corresponde una posición perfectamente definida del cursor y que responde al equilibrio del puente. Para fijar los límites de medición del instrumento, se conecta a los extremos del alambre la resistencia r_{31} .

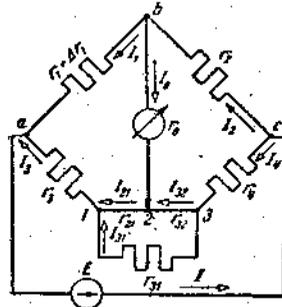


FIG. 2-4

Hallar las intensidades en todas las ramas del esquema dado y formar las ecuaciones de equilibrio del puente para $\Delta r_1 = 0$ y $\Delta r_1 = 3 \Omega$, sabiendo que la f.e.m. $E = 6 \text{ V}$, las resistencias $r_1 = r_2 = 6 \Omega$, $r_3 = r_4 = 4 \Omega$, $r_0 = 200 \Omega$, $r_{31} = 4 \Omega$.

La resistencia total del alambre de constantán que tiene una resistividad $\rho = 0,5 \Omega \cdot \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$, un diámetro de 0,15 mm y una longitud de 20 cm, es $r = r_{21} + r_{32} = 5,65 \Omega$, y la posición del punto 2 corresponde al equilibrio del puente para $\Delta r_1 = 0$.

Solución. Estando el puente en equilibrio y si $\Delta r_1 = 0$, $r_1 = r_2$, y $r_3 = r_4$ la resistencia $r_{32} = r_{21}$, y la intensidad I_0 de la rama del galvanómetro es igual a cero. Al cumplirse la condición indicada la intensidad $I_2 = I_1$ y la intensidad $I_4 = I_3$, siendo:

$$I_2 = I_1 = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{6}{12} = 0,5 \text{ A};$$

$$I_4 = I_3 = \frac{E}{r_3 + \frac{r \cdot r_{31}}{r + r_{31}} + r_4} = \frac{6}{4 + \frac{5,65 \cdot 4}{9,65} + 4} = 0,58 \text{ A}.$$

Las intensidades en el alambre y en la resistencia r_{31} serán dadas por las relaciones:

$$I_{32} = I_{21} = I_4 \frac{r_{31}}{r + r_{31}} = 0,58 \frac{4}{9,65} = 0,24 \text{ A};$$

$$I_{31} = I_4 \frac{r}{r + r_{31}} = 0,58 \frac{5,65}{9,65} = 0,34 \text{ A}.$$

Para determinar las intensidades en las ramas del esquema dado para $\Delta r_1 = 3 \Omega$, transformemos previamente el triángulo de resistencias r_{21} , r_{32} y r_{31} , mediante las

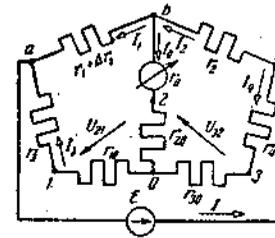


FIG. 2-5

fórmulas (2-7), en una estrella equivalente; obtendremos el esquema de la figura 2-5, donde $r_{20} = 0,83 \Omega$, $r_{10} = r_{30} = 1,17 \Omega$. Hallemos las intensidades en las ramas utilizando el método de los nudos.

Supongamos que el potencial φ_a del punto a es igual a cero, entonces $\varphi_c = \varphi_a + E = 6 \text{ V}$. Para determinar los potenciales de los otros dos nudos b y O, escribamos las ecuaciones:

$$\varphi_b \left(\frac{1}{r_1 + \Delta r_1} + \frac{1}{r_0 + r_{20}} + \frac{1}{r_2} \right) - \varphi_c \frac{1}{r_2} - \varphi_0 \frac{1}{r_0 + r_{20}} = 0;$$

$$\varphi_0 \left(\frac{1}{r_3 + r_{10}} + \frac{1}{r_0 + r_{20}} + \frac{1}{r_{30} + r_4} \right) - \varphi_b \frac{1}{r_0 + r_{20}} - \varphi_c \frac{1}{r_4 + r_{30}} = 0.$$



Sustituyendo por los valores numéricos, obtenemos:

$$\begin{aligned} 0,283 \varphi_b - 0,00498 \varphi_0 &= 1; \\ -0,00498 \varphi_b + 0,392 \varphi_0 &= 1,16. \end{aligned}$$

La solución de las ecuaciones nos da:

$$\varphi_b = 3,59 \text{ V} \quad \text{y} \quad \varphi_0 = 3,01 \text{ V}.$$

Las intensidades en las ramas del esquema de la figura 2-5 podrán hallarse por las fórmulas:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_b - \varphi_n}{r_1 + \Delta r_1} = \frac{3,59}{9} = 0,399 \text{ A}; \\ I_2 &= \frac{\varphi_c - \varphi_b}{r_2} = \frac{6 - 3,59}{6} = 0,402 \text{ A}; \\ I_0 &= \frac{\varphi_b - \varphi_0}{r_0 + r_{20}} = \frac{3,59 - 3,01}{200,8} = 0,0029 \text{ A}; \\ I_4 &= \frac{\varphi_c - \varphi_0}{r_4 + r_{30}} = \frac{6 - 3,01}{5,17} = 0,579 \text{ A}; \\ I_3 &= \frac{\varphi_0 - \varphi_a}{r_{10} + r_3} = \frac{3,01}{5,17} = 0,582 \text{ A}. \end{aligned}$$

Para determinar las intensidades en las ramas de alambre y en la resistencia r_{31} hallemos previamente las tensiones U_{21} , U_{32} y U_{31} , aplicando las siguientes ecuaciones (fig. 2-5):

$$U_{21} = r_{10}I_3 + r_{20}I_0 = 1,17 \cdot 0,582 + 0,83 \cdot 0,0029 = 0,683 \text{ V};$$

$$U_{32} = r_{30}I_4 - r_{20}I_0 = 1,17 \cdot 0,579 - 0,83 \cdot 0,0029 = 0,675 \text{ V};$$

$$U_{31} = r_{30}I_4 + r_{10}I_3 = 1,17 \cdot 0,579 + 1,17 \cdot 0,582 = 1,358 \text{ V}.$$

Conociendo las tensiones es fácil encontrar las intensidades I_{21} , I_{32} e I_{31} por la ley de Ohm (fig. 2-4)

$$\begin{aligned} I_{21} &= \frac{U_{21}}{r_{21}} = \frac{0,683}{2,825} = 0,242 \text{ A}; \\ I_{32} &= \frac{U_{32}}{r_{32}} = \frac{0,675}{2,825} = 0,239 \text{ A}; \\ I_{31} &= \frac{U_{31}}{r_{31}} = \frac{1,358}{4} = 0,34 \text{ A}. \end{aligned}$$

Escribamos las ecuaciones de equilibrio del puente para $\Delta r_1 \neq 0$:

$$(r_1 + \Delta r_1)I_1 = r_3I_3 + r_{21}I_{21};$$

$$r_2I_2 = r_4I_4 + r_{32}I_{32};$$

$$I_1 = I_2;$$

$$I_3 = I_4;$$

$$I_{21} = I_{32} = I_3 \frac{r_{31}}{r + r_{31}}.$$

De esas ecuaciones tendremos:

$$\frac{r_1 + \Delta r_1}{r_2} = \frac{r_3(r + r_{31}) + r_{21}r_{31}}{r_1(r + r_{31}) + r_{32} \cdot r_{31}}.$$

2.4. Transformación de una conexión de resistencias en estrella multirradial en un polígono equivalente.

Estudiamos la transformación de un agrupamiento de resistencias en *estrella multirradial* (con más de tres puntas) en un polígono equivalente. Destaquemos del esquema las resistencias y demostremos que el conjunto de resistencias conectadas en estrellas de n puntas, se transforma en un esquema poligonal equivalente, de $\frac{n(n-1)}{2}$ ramas. La figura 2-6. a representa un conjunto de resistencias conectadas en estrella de n puntas.

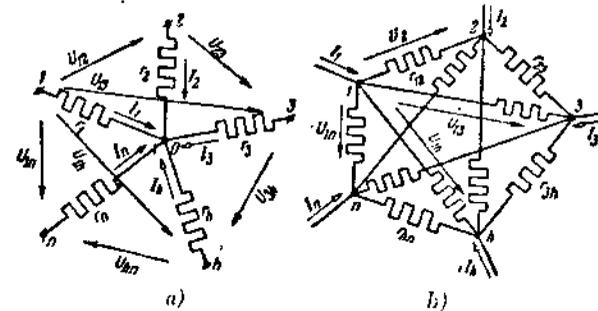


FIG. 2-6

Las ecuaciones del estado eléctrico para dicho esquema son:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (\varphi_1 - \varphi_0)g_1; \\ I_2 &= (\varphi_2 - \varphi_0)g_2; \dots \\ I_h &= (\varphi_h - \varphi_0)g_h; \dots \\ I_n &= (\varphi_n - \varphi_0)g_n; \\ I_1 + I_2 + \dots + I_h + \dots + I_n &= \\ &= (\varphi_1 - \varphi_0)g_1 + (\varphi_2 - \varphi_0)g_2 + \dots + \\ &+ (\varphi_h - \varphi_0)g_h + \dots + (\varphi_n - \varphi_0)g_n = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h, \dots, \varphi_n$, son los potenciales de los puntos correspondientes del esquema.

De la última ecuación despejamos el potencial del punto O:

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \dots + \varphi_h g_h + \dots + \varphi_n g_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_n}. \quad (2-11)$$

Sustituyendo φ_0 en la primera de las expresiones (2-10) obtenemos:

$$I_1 = \left(\varphi_1 - \frac{\varphi_1 g_1 + \varphi_2 g_2 + \dots + \varphi_h g_h + \dots + \varphi_n g_n}{g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_n} \right) g_1 =$$

$$= \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)g_1g_2 + (\varphi_1 - \varphi_3)g_1g_3 + \dots + (\varphi_1 - \varphi_h)g_1g_h + \dots + (\varphi_1 - \varphi_n)g_1g_n}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

Análogamente para las intensidades

$$I_2 = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)g_2g_1 + (\varphi_2 - \varphi_3)g_2g_3 + \dots + (\varphi_2 - \varphi_h)g_2g_h + \dots + (\varphi_2 - \varphi_n)g_2g_n}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

$$I_h = \frac{(\varphi_h - \varphi_1)g_hg_1 + (\varphi_h - \varphi_2)g_hg_2 + \dots + (\varphi_h - \varphi_{h-1})g_hg_{h-1} + \dots + (\varphi_h - \varphi_n)g_hg_n}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} \quad (2-12)$$

Reemplacemos en las expresiones (2-12) las diferencias de potenciales entre los puntos 1, 2, 3, ..., h, ..., n, por las tensiones, según la fórmula $U_{hi} = \varphi_h - \varphi_i$:

$$I_1 = U_{12} \frac{g_1g_2}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + U_{13} \frac{g_1g_3}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + \dots +$$

$$+ U_{1h} \frac{g_1g_h}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + \dots + U_{1n} \frac{g_1g_n}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

$$I_2 = U_{21} \frac{g_2g_1}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + U_{23} \frac{g_2g_3}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + \dots +$$

$$+ U_{2h} \frac{g_2g_h}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + \dots + U_{2n} \frac{g_2g_n}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

$$I_h = U_{h1} \frac{g_hg_1}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + U_{h2} \frac{g_hg_2}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + \dots +$$

$$+ U_{h,h-1} \frac{g_hg_{h-1}}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} + \dots + U_{hn} \frac{g_hg_n}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} \quad (2-13)$$

De las ecuaciones se ve que la intensidad en cada rama de la estrella de n puntas puede representarse como una suma de $(n-1)$ intensidades parciales, proporcionales a las tensiones existentes entre los puntos correspondientes del esquema considerado.

Por ejemplo, la intensidad

$$I_1 = I_{12} + I_{13} + \dots + I_{1h} + \dots + I_{1n}$$

donde

$$I_{12} = U_{12} \frac{g_1g_2}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

$$I_{13} = U_{13} \frac{g_1g_3}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

$$I_{1h} = U_{1h} \frac{g_1g_h}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

$$I_{1n} = U_{1n} \frac{g_1g_n}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h}$$

Análogamente se pueden representar las intensidades de las ramas restantes:

$$I_2 = I_{21} + I_{23} + \dots + I_{2h} + \dots + I_{2n}$$

$$I_h = I_{h1} + I_{h2} + \dots + I_{h,h-1} + \dots + I_{hn}$$

Demostremos que el esquema poligonal equivalente (fig. 2-6, b) de $n(n-1)$ número de ramas satisface a las expresiones (2-13). En efecto, para el esquema de la figura 2-6, b

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= U_{12}g_{12} + U_{13}g_{13} + \dots + U_{1h}g_{1h} + \dots + U_{1n}g_{1n}; \\ I_2 &= U_{21}g_{21} + U_{23}g_{23} + \dots + U_{2h}g_{2h} + \dots + U_{2n}g_{2n}; \\ I_h &= U_{h1}g_{h1} + U_{h2}g_{h2} + \dots + U_{h,h-1}g_{h,h-1} + \dots + U_{hn}g_{hn}. \end{aligned} \right\} (2-14)$$

Para que el esquema de la figura 2-6, b sea equivalente al de la figura 2-6, a, es necesario que satisfaga la condición de igualdad de las intensidades (I_1, I_2, I_3, \dots) y de las tensiones ($U_{12}, U_{13}, U_{1h}, \dots$) en ambos esquemas.

Como las condiciones de equivalencia deben ser satisfechas para valores cualesquiera de las intensidades y de las tensiones, igualando los coeficientes de las tensiones en las expresiones (2-13) y (2-14) obtendremos las fórmulas que determinan las conductancias de las ramas del polígono equivalente:

$$\left. \begin{aligned} g_{12} &= \frac{g_1g_2}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} = g_{21}; \\ g_{13} &= \frac{g_1g_3}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} = g_{31}; \\ g_{1h} &= \frac{g_1g_h}{\sum_{h=1}^{h=n} g_h} = g_{h1}. \end{aligned} \right\} (2-15)$$

Por cuanto el número de nudos del polígono es igual a n y el número de intensidades ligadas a cada nudo es $(n-1)$ y concurrendo cada rama a dos nudos, el número de las ramas del polígono será: $\frac{n(n-1)}{2}$.

De lo demostrado sigue, que una simple operación algebraica, que consiste en eliminar el potencial φ_n del sistema de ecuaciones que describen el estado eléctrico del esquema en estrella, conduce automáticamente a un esquema equivalente de forma poligonal. El problema inverso de transformar un polígono en una estrella equivalente de n radios para $n > 3$ es en general insoluble, ya que el número de resistencias y conductancias buscadas de la estrella equivalente, es menor que el número $\frac{n(n-1)}{2}$ de condiciones a las que aquéllas deben satisfacer: Para $n=3$, el número de condiciones es igual a $\frac{1}{2} n(n-1) = 3$, por lo tanto un triángulo de resistencias siempre se puede transformar en una estrella equivalente.

De las fórmulas (2-15), para $n=3$, se obtienen directamente las fórmulas (2-9) que dan la transformación de una estrella de tres puntas en un triángulo equivalente.

2-5. Transformaciones de una conexión en paralelo de ramas que contienen fuentes de f.e.m. y de intensidad. MILLMAN

Si en un esquema eléctrico compuesto existen uno o varios grupos de ramas conectadas en paralelo, con fuentes de f.e.m., el cálculo y el estudio de dicho esquema puede facilitarse notablemente reemplazando cada grupo de derivaciones por una fuente de f.e.m. equivalente y una resistencia interna equivalente.

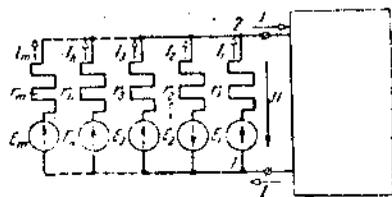


FIG. 2-7

En particular, se pueden transformar, con este método, los esquemas con agrupamiento mixto de elementos activos y pasivos, en esquemas de agrupamiento en serie.

Supongamos un esquema eléctrico de forma cualquiera y destaquemos en él un grupo de m derivaciones (fig. 2-7). El sector restante lo representaremos simbólicamente por un rectángulo.

Escribiremos de acuerdo a (1-12) la expresión de la intensidad I

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_h + \dots + I_m = E_1 g_1 - E_2 g_2 + \dots + E_h g_h + \dots + E_m g_m - U(g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_m). \quad (2-16)$$

Sustituycamos m ramas paralelas (fig. 2-7) por una rama equivalente

(fig. 2-8) de tal modo que la intensidad I y la tensión U permanezcan iguales.

En el esquema de la figura 2-8 la intensidad

$$I = (E - U)g. \quad (2-17)$$

Como las condiciones de equivalencia deben cumplirse para una intensidad I y una tensión U cualesquiera, igualando los segundos miembros de las expresiones (2-16) y (2-17) y descomponiendo la ecuación en dos, obtenemos:

$$U(g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_m) = Ug,$$

$$E_1 g_1 - E_2 g_2 + \dots + E_h g_h + \dots + E_m g_m = Eg,$$

de donde

$$g = g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_m = \sum_{h=1}^{h=m} g_h \quad (2-18)$$

y

$$E = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2 + \dots + E_h g_h + \dots + E_m g_m}{g_1 + g_2 + \dots + g_h + \dots + g_m} = \frac{\sum_{h=1}^{h=m} E_h g_h}{\sum_{h=1}^{h=m} g_h} \quad (2-19)$$

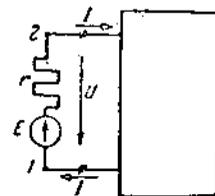


FIG. 2-8

Al calcular la f.e.m. equivalente, se afectan con signo positivo aquellas f.e.m. E_h que se dirigen al mismo nudo 2 que las f.e.m. equivalentes E_1 y con signo negativo las que se dirigen al otro nudo 1.

Si alguna de las ramas paralelas, por ejemplo la tercera, no contiene fuente de f.e.m. E_3 , entonces, en el numerador, desaparece el sumando $E_3 g_3$, pero queda la conductancia g_3 de esa rama en el denominador.

De la expresión (2-18) se desprende directamente que la conductancia equivalente g es independiente de las f.e.m. mientras que la f.e.m. equivalente (2-19) depende no sólo de las f.e.m. de las ramas sino también de sus conductancias.

Anteriormente (§ 2-1), se había señalado que la energía absorbida por las resistencias reales de las ramas, antes de la transformación,

no es igual a la energía absorbida por las resistencias equivalentes de las ramas después de la transformación.

Comparemos el régimen energético del esquema (fig. 2-7) con el régimen energético del mismo esquema transformado (fig. 2-8), en particular, cuando se abre el circuito de la rama de corriente I .

En todas las ramas del esquema (fig. 2-7), para $I = 0$, las intensidades en un caso general no son iguales a cero. De allí que la potencia total de las f.e.m., se invertirá en cubrir las pérdidas térmicas que se producen en las resistencias de las derivaciones. En el esquema 2-8 para $I = 0$, no hay pérdidas en la resistencia equivalente.

Por consiguiente, a pesar de la invariabilidad de las intensidades y de las tensiones en la parte del esquema no afectada por la transformación, la potencia desarrollada por las fuentes de f.e.m. antes de la transformación no es igual a la potencia desarrollada por la f.e.m. después de la transformación del esquema.

Sin embargo esta circunstancia no impide que se utilice ampliamente el concepto de f.e.m. equivalente para el cálculo de los circuitos eléctricos, puesto que, una vez determinada la intensidad I en el esquema equivalente, puede volverse al esquema original y hallar las intensidades reales y las potencias en todas sus ramas.

Si a los nudos 2 y 1 se conectan, además de las m ramas con fuentes de f.e.m., n ramas con fuentes de intensidad, en el numerador de la expresión (2-19) se sumarán los términos con las intensidades I_p de las fuentes dadas.

$$E = \frac{\sum_{h=1}^{h=m} E_h g_h + \sum_{p=1}^{p=n} I_p}{\sum_{h=1}^{h=m} g_h} \quad (2-20)$$

El signo positivo se atribuye a las intensidades de las corrientes dirigidas al mismo nudo 2 al que se dirige la f.e.m. E y el signo negativo, a las que se dirigen al otro nudo 1.

2-6. Transformación de un esquema con fuentes de f.e.m. en un esquema equivalente con intensidades de nudo (fuentes de intensidad).

Como se mencionó más arriba (§ 1-2), una fuente de energía con f.e.m. y resistencias internas dadas, puede representarse por una fuente de intensidad, permaneciendo invariable el régimen del receptor.

Dicha sustitución puede efectuarse aun cuando en el esquema eléctrico compuesto una rama contiene, además de la fuente de f.e.m. y de la resistencia interna, una resistencia complementaria conectada en serie con aquella.

Sea el esquema de la figura 2-9, *a*, a cuyos bornes 1 y 2 está conectada una rama con fuente de f.e.m. E y resistencia r que comprende también a la resistencia interna de la fuente de energía.

Si la tensión entre los bornes 1 y 2 es igual a U , la intensidad será:

$$I = \frac{E - U}{r} = \frac{E}{r} - \frac{U}{r} = I_c - \frac{U}{r} \quad (2-21)$$

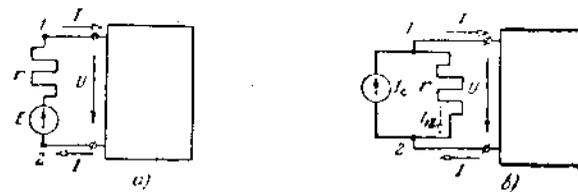


FIG. 2-9

De esta expresión se deduce que la intensidad I de la fuente de f.e.m. puede representarse como una diferencia entre las intensidades I_c y la $I_{12} = \frac{U}{r}$. A la ecuación (2-21) corresponde el esquema equivalente de la figura 2-9, *b*, en el cual la tensión U y la intensidad I siguen siendo las mismas que en el esquema 2-9, *a*. La corriente de intensidad I_c está dirigida, igual que la f.e.m. E , del borne 2 al 1.

Este tipo de sustitución puede efectuarse en el esquema tanto para una, varias o todas las fuentes de f.e.m.

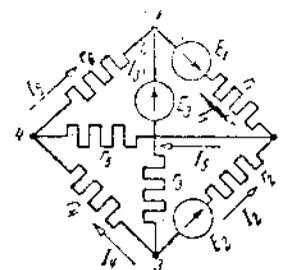


FIG. 2-10 a

A título de ejemplo analicemos el esquema dado en la figura 2-10, *a*, en tres de cuyas ramas hay fuentes de f.e.m.

En la figura 2-10, *b*, se da el esquema equivalente con fuentes de intensidad, donde:

$$I_{c1} = E_1 g_1;$$

$$I_{21} = (\varphi_2 - \varphi_1) g_1;$$

$$I_{c2} = E_2 g_2;$$

$$I_{23} = (\varphi_2 - \varphi_3) g_2;$$

$$I_{c3} = E_3 g_3;$$

$$I_{13} = (\varphi_1 - \varphi_3) g_3.$$

En el esquema de la figura 2-10, *b*, las fuentes de intensidad I_{c1} , I_{c2} e I_{c3} .

están conectadas todas con los mismos nudos 1, 2 y 3. Por lo tanto resulta conveniente reunir en cada nudo, dos fuentes de intensidad en una (fig. 2-10, c).

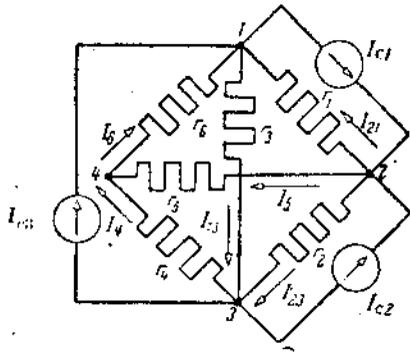


Fig. 2-10 b

Las intensidades J_1 , J_2 y J_3 se llaman intensidades de nudo y se determinan de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff.

$$J_1 = I_{e3} - I_{c1} = E_3 g_3 - E_1 g_1;$$

$$J_2 = I_{e1} + I_{e2} = E_1 g_1 + E_2 g_2;$$

$$J_3 = -I_{e3} - I_{e2} = -E_3 g_3 - E_2 g_2.$$

Por consiguiente, el esquema eléctrico cuyas ramas tienen f.e.m., puede ser reemplazado por un esquema equivalente con intensidades de nudo, permaneciendo invariables los potenciales en los nudos.

Señalemos que las intensidades I_1 , I_2 , I_3 , en el esquema dado, son iguales a las intensidades de las mismas ramas en el esquema equivalente. En cambio, las intensidades en las ramas con f.e.m., no son iguales a las intensidades de las ramas correspondientes en el esquema equivalente. Por ejemplo, en el esquema dado (fig. 2-10, a) la intensidad $I_1 = (E_1 + \varphi_1 - \varphi_2)g_1$ y en el esquema equivalente, $I_{21} = (\varphi_2 - \varphi_1)g_1$.

En un caso general, de las ecuaciones de nudos se deduce que la transformación de un esquema con f.e.m. en las ramas, en otro esquema equivalente con intensidades de nudo, es correcta.

En efecto, de acuerdo a la ecuación (1-31) tenemos en el esquema figura 2-10, a, para $\varphi_1 = 0$:

$$\varphi_1 g_{11} - \varphi_2 g_{12} - \varphi_3 g_{13} = (E_3 g_3 - E_1 g_1) = J_1;$$

$$\varphi_1 g_{21} + \varphi_2 g_{22} - \varphi_3 g_{23} = (E_2 g_2 + E_1 g_1) = J_2;$$

$$-\varphi_1 g_{31} - \varphi_2 g_{32} + \varphi_3 g_{33} = -(E_2 g_2 + E_3 g_3) = J_3,$$

donde

$$g_{11} = g_1 + g_5 + g_6;$$

$$g_{22} = g_1 + g_2 + g_5;$$

$$g_{33} = g_2 + g_3 + g_4.$$

El esquema equivalente de la figura 2-10, c, satisface a estas ecuaciones.

La sustitución inversa de un esquema eléctrico con intensidades de nudo dadas, por un esquema equivalente con fuentes de f.e.m., no da una solución definida. Ello se explica por el hecho de que el número de intensidades de nudo o el número de ramas, y por lo tanto el número de ecuaciones que se pueden formar de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff será menor que el número de f.e.m. buscada. Pueden atribuirse valores arbitrarios a las f.e.m. de ramas cualesquiera, iguales al número de ecuaciones que faltan, pudiéndose entonces determinar las f.e.m. desconocidas, resolviendo simultáneamente las ecuaciones independientes basadas en la primera ley de Kirchhoff.

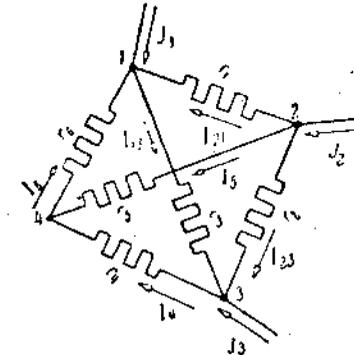


Fig. 2-10 c

Problema 2-2. Determinar las intensidades en todas las ramas y establecer las ecuaciones del equilibrio de potencias para el esquema de la figura 2-11, a, sabiendo que la f.e.m. $E_1 = 48$ V, $E_2 = 24$ V, $E_3 = 12$ V y las resistencias de las ramas son $r_1 = 3 \Omega$, $r_2 = 6 \Omega$, $r_3 = r_4 = 2 \Omega$, $r = 6 \Omega$.

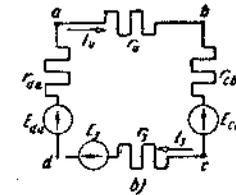
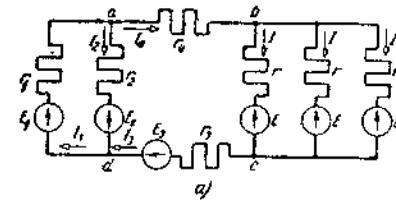


Fig. 2-11

Solución. Para determinar las intensidades I_1 e I_3 (que son iguales) reemplacemos previamente cada grupo de ramas conectadas en paralelo, por una sola

equivalente. Hallaremos la f.e.m. equivalente E_{da} para la primera y segunda ramas derivadas y la resistencia equivalente r_{da} , utilizando las expresiones:

$$E_{da} = \frac{E_1 g_1 - E_2 g_2}{g_1 + g_2} = \frac{48 \cdot \frac{1}{3} - 24 \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 24 \text{ V}$$

y

$$r_{da} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{3 \cdot 6}{3 + 6} = 2 \Omega.$$

Análogamente hallaremos la resistencia y la f.e.m. equivalentes para las tres derivaciones conectadas a los nudos b y c ,

$$E_{cb} = \frac{3E}{3} = E = 12 \text{ V} \quad \text{y} \quad r_{cb} = \frac{r}{3} = 2 \Omega.$$

Como resultado de las transformaciones obtenemos el esquema de la figura 2-11, b .

Del esquema tendremos:

La intensidad

$$I_3 = I_4 = \frac{E_3 + E_{da} - E_{cb}}{r_3 + r_{da} + r_{cb} + r_4} = \frac{12 + 24 - 12}{2 + 2 + 2 + 2} = 3 \text{ A}$$

y las tensiones en los tramos

$$U_{ad} = E_{da} - r_{da} I_3 = 24 - 2 \cdot 3 = 18 \text{ V},$$

$$U_{bc} = E_{cb} + r_{cb} I_3 = 12 + 2 \cdot 3 = 18 \text{ V}.$$

Las intensidades en las ramas del esquema dado serán

$$I_1 = (E_1 - U_{ad}) g_1 = (48 - 18) \frac{1}{3} = 10 \text{ A},$$

$$I_2 = (E_2 + U_{ad}) g_2 = (24 + 18) \frac{1}{6} = 7 \text{ A}.$$

Las intensidades en las ramas que tienen f.e.m. E iguales, son iguales entre sí y de sentido opuesto a las f.e.m.

$$I = (U_{bc} - E) g = (18 - 12) \frac{1}{6} = 1 \text{ A}.$$

La potencia total de todas las fuentes de f.e.m. es igual a:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3 - 3EI = 48 \cdot 10 + 24 \cdot 7 + 12 \cdot 3 - 3 \cdot 12 \cdot 1 = 648 \text{ W}.$$

La potencia en las resistencias debe ser igual a la potencia total de las fuentes de f.e.m., esto es

$$r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 + (r_3 + r_4) I_3^2 + 3rI^2 = 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 7^2 + 4 \cdot 3^2 + 3 \cdot 6 \cdot 1 = 648 \text{ W}.$$

Señalamos que las fuentes de f.e.m. E del esquema dado trabajan en régimen de receptores, consumiendo la energía de otras fuentes.

CAPÍTULO III

DIPOLOS Y CUADRIPOLOS

3-1. Consideraciones generales sobre los dipolos.

Al estudiar los procesos que tienen lugar en los circuitos eléctricos compuestos, suele ser de interés conocer la intensidad, la tensión y la potencia en una sola rama. Sin embargo, las ramas aisladas pueden destacarse del circuito compuesto no sólo para estudiar separadamente los procesos que se efectúan en ellas, sino también para establecer la relación, por ejemplo, entre una parte del circuito que contiene fuentes de energía eléctrica y otra que contiene receptores. En esos casos, como también para el cálculo de circuitos ramificados, resulta necesario destacar una rama, conectada con el circuito compuesto en dos puntos (dos bornes). La parte del "circuito eléctrico de configuración arbitraria que se estudia con respecto a la rama aislada, es decir con respecto a los dos bornes o, dicho de otro modo, a los dos polos, se llama *dipolo*.

Los dipolos que contienen fuentes de energía se llaman *activos* y aquellos que no las contienen se llaman *pasivos*. Todo dipolo pasivo consume energía y se caracteriza por una magnitud, la resistencia r_i .

En un esquema equivalente el dipolo puede representarse por un solo elemento, la resistencia r_i , llamada *resistencia interna o de entrada* del dipolo pasivo.

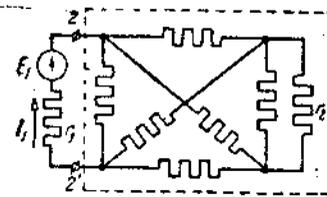


FIG. 3-1

Si se conoce el esquema del dipolo pasivo, para determinar su resistencia de entrada r_i habrá que "envolverla" de un modo o de otro respecto a los dos bornes dados.

En la figura 3-1 se muestra un esquema eléctrico compuesto. Si se examina este esquema respecto a los bornes 2-2' de la rama que

contiene la f.e.m. E_1 y a la resistencia r_1 , la parte restante del esquema (rodeada por las líneas de puntos) constituirá un dipolo pasivo (sin fuentes de energía). Si el mismo esquema se refiere a los bornes 1-1'

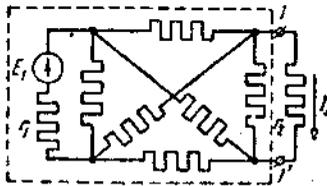


Fig. 3-2

de la rama que contiene a la resistencia r_2 (fig. 3-2), se obtendrá un dipolo activo (encerrado entre líneas de puntos).

3-2. Teorema del dipolo activo y su aplicación al cálculo de circuitos ramificados.

Destaquemos en el esquema eléctrico, la rama 2-2' (con la resistencia r) conectada en los puntos 1-1' con el dipolo activo (fig. 3-4). Para calcular la intensidad I en la rama 2-2' se puede reemplazar el dipolo activo por una fuente de f.e.m. y un dipolo pasivo. Para hallar

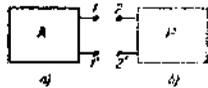


Fig. 3-3

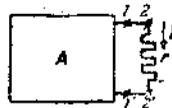


Fig. 3-4

la fuerza electromotriz, abramos el circuito en los puntos 1 y 2 (fig. 3-5, a) y determinemos la diferencia de potenciales U_v , experimentalmente o por cálculo. Luego conectemos a los puntos 1 y 2 la f.e.m. E'_v opuesta a U_v (fig. 3-5, b): $E'_v = U_v$. La intensidad en la rama 2-2' seguirá siendo nula dado que la diferencia de potenciales de dos puntos cualesquiera no habrá cambiado. El esquema de la figura 3-5, b se distingue del esquema original en que, entre los puntos 1 y 2 está conectada la fuerza electromotriz E'_v y en que la intensidad en la rama 2-2' es igual a cero. Este esquema será equivalente al original si se introduce

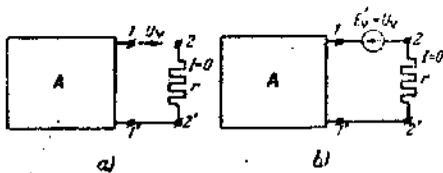


Fig. 3-5

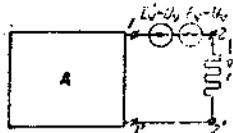


Fig. 3-6

entre los puntos 1 y 2 otra f.e.m. E_v igual a la E'_v pero de sentido contrario (fig. 3-6).

De acuerdo al principio de superposición, se puede hallar la intensidad en la rama 2-2' sumando algebraicamente las intensidades producidas por cada una de las fuentes. Pero, todas las fuentes que se encuentran en el interior del dipolo activo, junto con la fuente de f.e.m. E'_v crean en la rama 2-2' una corriente de intensidad nula (fig. 3-5, b). Por lo tanto, la intensidad producida en la rama 2-2' solamente por la f.e.m. E_v (fig. 3-7, a) será la intensidad real en esa rama (fig. 3-4) e igual a:

$$I = \frac{E_v}{r_i + r} = \frac{U_v}{r_i + r}, \tag{3-1}$$

donde r_i es la resistencia de entrada del dipolo pasivo y que se obtiene del activo, igualando a cero todas las fuerzas electromotrices de las fuentes de tensión y todas las intensidades de las fuentes de intensidad.

En particular, para $r = 0$, es decir estando la rama 2-2' en corto circuito, $I_c = \frac{U_v}{r_i}$, o sea que la resistencia de entrada del dipolo activo puede expresarse como una relación entre la tensión en circuito abierto y la intensidad en corto circuito.

$$r_i = \frac{U_v}{I_c}.$$

La fórmula (3-1) puede también escribirse de la siguiente manera

$$I = \frac{U_v}{\frac{U_v}{I_c} + r}. \tag{3-2}$$

La ecuación (3-2) puede obtenerse fácilmente de la (1-55). En efecto, escribamos la ecuación (1-55) suprimiendo subíndices

$$I = I_c \left(1 - \frac{U}{U_v} \right) = \frac{I_c}{U_v} (U_v - rI).$$

de donde obtenemos la (3-2).

La resistencia r puede ser, en un caso general, la resistencia de la entrada del dipolo pasivo conectado a los bornes 1-1' del dipolo activo dado.

Como ya se indicó anteriormente, el valor de la resistencia r_i puede determinarse experimentalmente, de acuerdo a la ecuación (3-1) o por cálculo, si el esquema del dipolo activo está dado. La ecuación (3-1) es la expresión matemática del teorema del dipolo activo, llamado también teorema del generador equivalente.

A la ecuación (3-1) le corresponde el esquema de la figura 3-7, b en la que el dipolo activo está representado por el sector 2-1-1' que contiene la f.e.m. $E_v = U_v$ y la resistencia r_i . De modo que, el dipolo

activo, respecto a la rama con resistencia r con él conectada, puede considerarse como una fuente de energía de resistencia interna r_i y f.e.m. E_i , igual ésta última a la tensión U_v existente entre los bornes del dipolo, cuando la rama 2-2' está en circuito abierto. De esta proposición se deduce que el dipolo activo puede representarse también como una fuente de intensidad I y una resistencia r_i conectada en paralelo con la fuente, como se vio en los apartados 1-2 y 2-6.

Debemos destacar que en el esquema equivalente del dipolo activo (fig. 3-7, b), así como en cualquier otro esquema transformado con fuentes de f.e.m., la potencia de la fuentes con f.e.m. equivalente y las pérdidas en la resistencia r_i no son en general iguales a la potencia total de las fuentes de energía del circuito real ni a las pérdidas en las resistencias del dipolo activo, respectivamente.

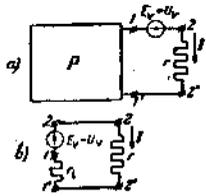


FIG. 3-7

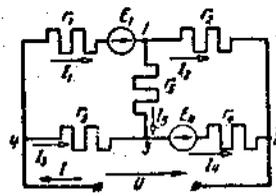


FIG. 3-8

Aplicaremos el teorema del dipolo activo y el principio de superposición al cálculo de los circuitos eléctricos ramificados.

El cálculo de las intensidades en un circuito eléctrico dado, que se puede referir a una de las ramas en forma de un dipolo activo (fig. 3-4), puede simplificarse utilizando el principio de superposición. En efecto, la intensidad en cada rama del dipolo activo puede hallarse sumando algebraicamente las intensidades de las corrientes que se producen en dicha rama, en marcha en vacío (fig. 3-5, a) y en un régimen correspondiente a una f.e.m. $E_v = U_v$ (fig. 3-7, a).

Por lo tanto, una elección acertada de la rama (para el régimen de marcha en vacío) puede simplificar considerablemente los esquemas para los regímenes indicados y con ello facilitar el cálculo de dichos esquemas y del circuito dado.

Para ilustrar lo antedicho examinemos el esquema de la figura 3-8 en el cual están dadas las f.e.m., la tensión U y las resistencias de las ramas; se desean determinar las intensidades en todas las ramas.

Desconectemos la rama con resistencias r_5 (fig. 3-9) y hallemos la intensidad $I_{v1} = I_{v2}$ de la ecuación $E_1 = (r_1 + r_2)I_{v1} - U$ y la intensidad $I_{v3} = I_{v4}$ de la ecuación $E_2 = (r_3 + r_4)I_{v3} - U$. Conociendo las intensidades I_{v1} e I_{v3} determinaremos la tensión U_v por la fórmula:

$$U_v = r_3 I_{v3} - r_1 I_{v1} + E_1.$$

Igualando a cero las f.e.m. E_1 y E_2 y la tensión U , y conectando

en la rama con resistencia r_5 , la fuente de f.e.m. $E_v = U_v$, obtendremos el esquema de la figura 3-10 para el cual encontraremos las intensi-

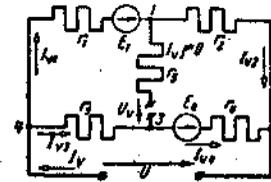


FIG. 3-9

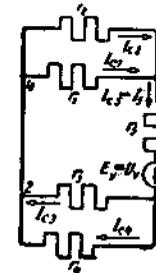


FIG. 3-10

dades en todas las ramas. La resistencia de entrada r_i del dipolo, respecto a los bornes de la resistencia r_5 , será:

$$r_i = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4}.$$

La intensidad

$$I_{v5} = I_5 = \frac{U_v}{r_1 + r_5}.$$

Las intensidades en las ramas restantes

$$I_{v1} = I_5 \frac{r_2}{r_1 + r_2};$$

$$I_{v2} = I_5 \frac{r_1}{r_1 + r_2};$$

$$I_{v3} = I_5 \frac{r_4}{r_3 + r_4};$$

$$I_{v4} = I_5 \frac{r_3}{r_3 + r_4}.$$

Aplicando el principio de superposición, encontraremos las intensidades reales en las rama del esquema, figura 3-8.

$$I = I_{v1} + I_{v1};$$

$$I_2 = I_{v2} - I_{v2};$$

$$I_3 = I_{v3} - I_{v3};$$

$$I_4 = I_{v4} + I_{v4};$$

$$I_5 = I_{v5} + I_{v5} = 0 + I_5;$$

$$I = I_1 + I_3.$$

De modo que seis intensidades desconocidas en las ramas del esquema ramificado de la figura 3-8 quedan determinadas por superposición de las intensidades parciales, halladas para los esquemas simples de las figuras 3-9 y 3-10.

Examinemos otro método de cálculo de circuitos ramificados que se basa en el principio de superposición y en una aplicación "singular" del teorema del dipolo.



Fig. 3-11

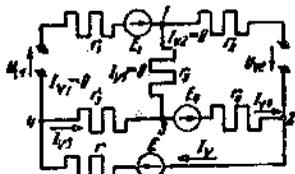


Fig. 3-12

Sea el esquema de la figura 3-11 donde están dadas todas las f.e.m. y todas las resistencias; se pide determinar las intensidades en todas las ramas. Desconectemos simultáneamente la primera y la segunda ramas y determinemos en el esquema obtenido (fig. 3-12) las intensidades I_v , I_{v3} , I_{v4} y las tensiones U_{v1} , U_{v2} .

$$I_v = I_{v3} = I_{v4} = \frac{E + E_4}{r + r_3 + r_4};$$

$$U_{v1} = E_1 + r_3 I_{v3};$$

$$U_{v2} = -E_4 + r_4 I_{v4}.$$

Luego conectemos simultáneamente, en la primera y segunda ramas las f.e.m. E'_{v1} y E'_{v2} iguales en valor a las tensiones U_{v1} y U_{v2} (fig. 3-13). Las intensidades en la primera y en la segunda ramas serán iguales a cero, igual que en el esquema de la figura 3-12, dado que la diferencia de potenciales entre dos puntos cualesquiera del esquema sigue siendo la misma que en el esquema 3-12. Si se conectan en la primera y en la segunda ramas otras f.e.m. E''_{v1} y E''_{v2} contrarias a las E'_{v1} y E'_{v2} respectivamente (fig. 3-14), las intensidades en todas las ramas serán iguales a las del esquema dado. Como las fuentes de f.e.m. E , E_1 , E_3 , E'_{v1} , E'_{v2} no producen corrientes en la primera y en la segunda ramas (fig. 3-13), y el esquema representado en la figura 3-14 es idéntico al dado, resulta que las intensidades reales en las ramas mencionadas son producidas evidentemente sólo por las fuentes de f.e.m. $E_{v1} = U_{v1}$ y $E_{v2} = U_{v2}$ (fig. 3-15), lo que se deduce directamente del principio de superposición. Es necesario señalar que por cuanto en el esquema de la figura 3-13 las intensidades $I_{v1} = 0$ e $I_{v2} = 0$, se deduce de la primera ley de Kirchhoff que en este esquema la intensidad I_{v5} también es igual a cero y en el de la figura 3-15, la I_{v5} en la misma rama es igual a la intensidad real I_5 . Por consiguiente, para determinar las intensi-

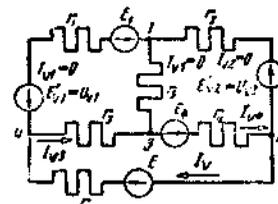


Fig. 3-13

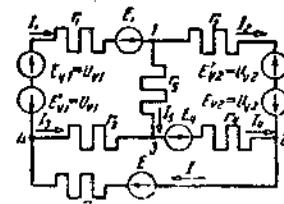


Fig. 3-14

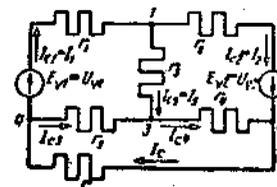


Fig. 3-15

dades I_1 , I_2 , I_5 basta con calcular los esquemas de la figura 3-15 para lo cual conviene transformar previamente el triángulo de resistencias r_3 , r y r_4 en una estrella equivalente. Conociendo las intensidades I_1 , I_2 e I_5 , es fácil hallar las I_{v3} , I_{v4} e I_v en el esquema de la figura 3-15, y luego, por el principio de superposición, se podrán determinar las intensidades I_3 , I_4 e I aplicando las expresiones:

$$I_3 = I_{v3} + I_{v4};$$

$$I_4 = I_{v4} + I_{v3};$$

$$I = I_v + I_{v5}.$$

De modo que también en este caso, todas las intensidades desconocidas del esquema 3-11, se determinan por superposición de las intensidades parciales, halladas para los esquemas más simples de la figura 3-12 y 3-15.

Problema 3-1. Aplicando el teorema del dipolo activo, hallar la expresión de la intensidad I_0 en la rama que contiene un dispositivo de medición (fig. 3-16, a), sabiendo que la intensidad de la fuente de intensidad $I_c = m_A$, la resis-

tencia $r = 100 \Omega$, la resistencia del aparato $r_0 = 50 \Omega$ y las resistencias r_1 de dos brazos opuestos del puente varían simultáneamente de cero a $2r$; construir el gráfico de variación de I_0 en función de la resistencia r_1 .

Solución. Poniendo en circuito abierto la rama del aparato medidor (fig. 3-16, b) las intensidades I_{v1} e I_{v2} , en virtud de la igualdad de las resistencias de las ramas paralelas, serán iguales entre sí:

$$I_{v1} = I_{v2} = \frac{I_c}{2}.$$

La tensión U_v (fig. 3-16, b) estará dada por la ecuación

$$r_1 \frac{I_c}{2} + U_v - r \frac{I_c}{2} = 0;$$

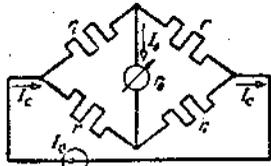


FIG. 3-16a

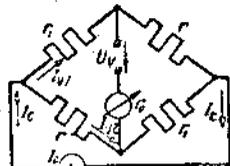


FIG. 3-16b

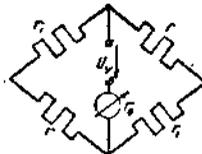


FIG. 3-16c

es decir

$$U_v = \frac{I_c}{2} (r - r_1).$$

La resistencia de entrada de todo el esquema, para $I_c = 0$ se determinará de la figura 3-16, c por la fórmula

$$r_1 = \frac{(r_1 + r)(r_1 + r)}{r_1 + r + r_1 + r} = \frac{1}{2} (r_1 + r).$$

Según el teorema del dipolo activo, la intensidad I_0 es igual a:

$$I_0 = \frac{U_c}{r_1 + r_0} = I_c \frac{r - r_1}{2r_0 + r + r_1}.$$

Sustituyendo en esa ecuación los valores numéricos, tendremos:

$$I_0 = 10 \frac{100 - r_1}{100 + 100 + r_1}$$

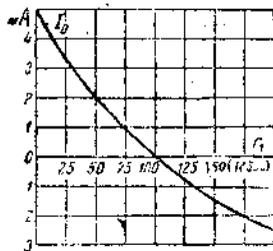


FIG. 3-16d

En la figura 3-16, d, se da el gráfico de variación de la intensidad I_0 en función de la resistencia r_1 . De la curva se ve que al variar la resistencia r_1 , no sólo varía la intensidad I_0 de la corriente, sino también su sentido.

Problema 3-2. Hallar la ley de variación de la intensidad I_1 en función de la temperatura t , sabiendo que la resistencia $r_1(t)$ varía en función de la temperatura según la fórmula

$$r_1(t) = r_1(0) (1 + At + Bt^2),$$

donde

$$A = 3,94 \cdot 10^{-3}, B = -5,8 \cdot 10^{-7}, r_1(0) = 46 \Omega. \quad (\text{fig. 3-17 a})$$

Las resistencias restantes del puente son constantes e iguales a $r_2 = r_3 = r_4 = 50 \Omega$; la resistencia del galvanómetro $r_0 = 50 \Omega$; la f.e.m. $E = 1,5 \text{ V}$.

Expresar además la intensidad I_0 en función de I_1 .

Solución. Tenemos, según el teorema del dipolo activo

$$I_1 = \frac{U_v}{r_{i1} + r_1(t)}$$

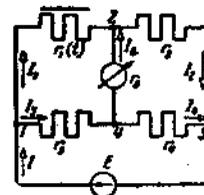


FIG. 3-17a

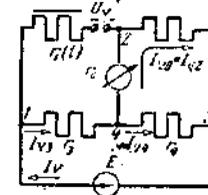


FIG. 3-17b

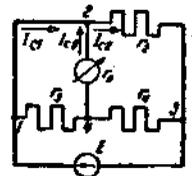


FIG. 3-17c

Para determinar la tensión U_v escribamos para el esquema de la figura 3-17, b las ecuaciones siguientes:

$$E = r_3 I_{r3} + (r_0 + r_2) I_{v0};$$

$$E = r_4 I_{r4} + r_3 I_{v3};$$

$$I_v = I_{v3} = I_{r0} + I_{v4};$$

$$U_v = E - r_2 I_{v2}.$$

Resolviendo simultáneamente estas ecuaciones y haciendo sustituciones numéricas, tendremos:

$$I_{v0} = \frac{E \cdot r_4}{r_3(r_2 + r_0 + r_4) + (r_2 + r_0)r_4} = \frac{1,5 \cdot 50}{50 \cdot 150 + 100 \cdot 50} = 0,006 \text{ A.}$$

$$U_v = \frac{E [(r_2 + r_0 + r_4)r_3 + r_0 r_4]}{r_3(r_2 + r_0 + r_4) + (r_2 + r_0)r_4} = \frac{1,5(150 \cdot 50 + 50 \cdot 50)}{50 \cdot 100 + 100 \cdot 50} = 1,2 \text{ V.}$$

Siendo $E = 0$ y estando los bornes 1 y 3 unidos entre sí, las resistencias r_3 y r_4 , consideradas con respecto a la rama abierta, están conectadas en paralelo y la resistencia r_0 , montada en serie con ellas. La resistencia equivalente de las tres será:

$$r = r_0 + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = 50 + \frac{50 \cdot 50}{100} = 75 \Omega.$$

A su vez la resistencia r_2 está conectada en paralelo con la r equivalente, es decir la resistencia de entrada r_{i1} de todo el esquema, respecto a los bornes 1-2 será

$$r_{i1} = \frac{r \cdot r_2}{r + r_2} = \frac{75 \cdot 50}{125} = 30 \Omega.$$

De modo que la intensidad

$$I_1 = \frac{1,2}{30 + r_1(t)}$$

Mediante esta fórmula se puede construir el gráfico de variación de la intensidad en función de la temperatura.

La variación de la intensidad I_0 en función de la intensidad I_1 puede obtenerse de la función lineal $I_0 = b_0 + b_1 I_1$. Como sentido positivo de la corriente elegimos el que va del punto 4 al 2 (fig. 3-17, a). Al desconectar la primera rama, la intensidad $I_{v1} = 0$, la corriente I_{v0} se dirige del borne 4 al borne 2 y su intensidad $I_{v0} = +0,006 = b_0$. Al encontrarse la misma rama en cortocircuito, la intensidad I_{c1} , según el teorema del dipolo activo será:

$$I_{c1} = \frac{U_v}{r_{i1}} = \frac{1,2}{30} = 0,04 \text{ A,}$$

y la intensidad

$$I_{c0} = I_{c2} - I_{c1} = \frac{E}{r_2} - \frac{U_v}{r_{i1}} = 0,03 - 0,04 = -0,01 \text{ A}$$

de la ecuación $I_{c0} = b_0 + b_1 I_{c1}$ hallamos:

$$b_1 = \frac{I_{c0} - I_{v0}}{I_{c1}} = \frac{-0,01 - 0,006}{0,04} = -0,4.$$

Por consiguiente

$$I_0 = +0,006 - 0,4 I_1.$$

3-3. Transmisión de la energía de un dipolo activo a uno pasivo.

Para examinar el problema de transmisión de la energía de un dipolo activo a uno pasivo, recurramos al esquema equivalente (fig. 37, b) donde $r_i = r_{iA}$, la resistencia de entrada del dipolo activo (fuente de energía), y $E_r = U_v$, la f.e.m. equivalente, permanecen constantes; mientras que $r = r_{iP}$, la resistencia de entrada del dipolo pasivo (carga), pueden tomar cualquier valor.

Busquemos la relación entre r_i y r , para la cual la potencia del dipolo tenga un valor máximo. La potencia de un dipolo pasivo se determina por la expresión

$$P = E_r I - r_i I^2 = U_v I - r_i I^2, \quad (3-3)$$

o también

$$P = r I^2, \quad (3-4)$$

donde $U \cdot I$ — es la potencia desarrollada por los dipolos activos equivalentes.

$r_i I^2$ — son las pérdidas en la resistencia de entrada del dipolo activo.

Hallemos el valor de la intensidad I para la cual la potencia P sea máxima; con ese objeto igualemos a cero la derivada de P respecto a I (fórmula 3-3):

$$\frac{dP}{dI} = U_v - 2r_i I = 0,$$

de donde

$$I = \frac{U_v}{2r_i}.$$

Pero en general la intensidad $I = \frac{U_v}{r_i + r}$, o sea que la potencia es máxima para

$$r = r_i, \quad (3-5)$$

es decir cuando las resistencias de entrada de los dipolos activo y pasivo son iguales. Aplicando la fórmula (3-4), y para $r = r_i$, tenemos

$$P_{\text{máx}} = \frac{U_v^2}{4r_i}.$$

La razón de las potencias P , del dipolo pasivo, y $P_A = U \cdot I$ del dipolo activo equivalente, se llama *rendimiento del dipolo activo equivalente*

$$\eta = \frac{P}{P_A} = \frac{U_v I - r_i I^2}{U_v I} = 1 - \frac{r_i I}{U_v} = \frac{r}{r_i + r}. \quad (3-6)$$

De la expresión (3-6) se ve que para la máxima potencia del dipolo pasivo, el rendimiento es igual a 0,5. Para $r > r_i$ se podrán obtener rendimientos más altos.

El rendimiento del dipolo activo real será igual al del dipolo activo equivalente sólo cuando se cumpla cierta condición. Si al desconectar el dipolo pasivo del activo real, no se producen corrientes ni pérdidas en las ramas de éste último, al igual que en el esquema equivalente (fig. 3-7, b), sólo entonces el dipolo activo real y el equivalente tendrán el mismo rendimiento.

No cumpliéndose esta condición, y habiendo pérdidas en el dipolo activo real, su rendimiento será siempre menor que el del dipolo equivalente.

Con los resultados obtenidos se puede caracterizar el régimen de una línea de transmisión de energía eléctrica con corriente continua, de longitud reducida, cuando se puede despreciar en ella las pérdidas

de corriente. En la figura 1-10 se muestra el esquema equivalente de una línea, la resistencia de cuyos conductores está designada con r_1 .

Supongamos que la tensión U_1 al principio de la línea de transmisión no varía. Comparando los esquemas de las figuras 1-10 y 3-7, b, se deduce que el régimen de la línea de transmisión puede definirse por las mismas relaciones que caracterizan la conexión en serie de un dipolo activo y de uno pasivo.

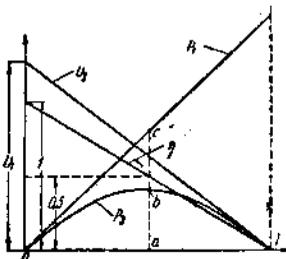


FIG. 3-18

A tal efecto debe representarse la figura 1-10 como una conexión en serie de un dipolo activo con f.e.m. $E = U_1$ y resistencia r_1 y un dipolo pasivo con resistencia r_2 . Utilizando las fórmulas (3-3) y (3-6) y el esquema de la figura 1-10, obtenemos la expresión de la potencia P_2 del receptor y el rendimiento η de la línea de transmisión

$$P_2 = U_1 I - r_1 I^2;$$

$$\eta = 1 - \frac{r_1 I}{U_1} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \quad (3-7)$$

La potencia, desarrollada por el generador es

$$P_1 = U_1 I,$$

y la tensión en los bornes del receptor,

$$U_2 = U_1 - r_1 I.$$

De acuerdo a las ecuaciones obtenidas, se han construido en la figura 3-18 los gráficos que dan los valores de U_2 , P_1 , P_2 y η en función de la intensidad I y que caracterizan enteramente el régimen de la línea.

Para $r_2 = \infty$ (Línea en circuito abierto) la intensidad I es igual a cero (en la fig. 3-18, origen de las coordenadas); para $r_2 = r_1$, la intensidad estará dada por el segmento "Oa" y para $r_2 = 0$ (cortocircuito de la línea) el valor de la intensidad es máximo e igual a I_c . Además, para $r_2 = r_1$, la potencia P_1 , dada por el segmento ac, es igual al doble de la potencia del receptor, es decir $ac = 2ab = 2bc$, y el rendimiento para ese régimen será $\eta = 0,5$.

Al efectuarse la transmisión sobre una línea de gran potencia, se

trata de obtener el mayor rendimiento posible. Esta circunstancia obliga a su vez a exigir una $r_1 \ll r_2$.

Al transmitir la energía por una línea de comunicación se trata de obtener una potencia máxima en el receptor lo cual nos conduce a un rendimiento bajo*.

3-4. Cuadripolos y sus ecuaciones fundamentales.

El estudio del régimen de los circuitos eléctricos compuestos se reduce, frecuentemente, al establecimiento de una relación entre las intensidades, las tensiones y las potencias de dos ramas distintas del circuito eléctrico. Como cada rama se conecta con el resto del circuito en dos puntos, resulta que la parte que se destaca del circuito tiene cuatro bornes (polos); a dos de ellos (bornes de entrada) se conecta generalmente la fuente de energía, al otro par (bornes de salida), el receptor.

La parte del circuito eléctrico que tiene dos pares de bornes para permitir la conexión de fuentes y receptores de energía, se llama *cuadripolo*. Los cuadripolos se clasifican en *pasivos* y *activos*. Los pasivos son aquellos que no contienen fuentes de energía en sus ramas, por ejemplo, las líneas de transmisión de energía eléctrica. Los cuadripolos que contienen fuentes de energía en sus ramas, se llaman activos.

* Las primeras experiencias de transmisión de energía eléctrica con corriente continua fueron realizadas por el ingeniero ruso F. A. Pirotzky. En 1874, cerca de Petersburgo, F. A. Pirotzky instaló una transmisión de energía de 6 HP hasta una distancia de un km. Posteriormente hizo unos ensayos para transmitir energía eléctrica por los rieles del ferrocarril. Sobre la base de sus experiencias, Pirotzky llegó a la conclusión de que se podía transmitir energías de gran potencia a grandes distancias. Propuso que se utilizara como fuente de energía para los motores primarios, los torrentes de agua.

Fué D. Lachinov el primero que fundamentó teóricamente la posibilidad de transmitir la energía eléctrica a grandes distancias. En 1880 publicó en el primer número de la revista "Electrichestvo" su trabajo titulado "Trabajo electromecánico". La teoría expuesta por Lachinov, si bien simplificada, no dejaba de contener los elementos esenciales de la teoría actual sobre transmisión de energía por corriente continua.

Las experiencias de Pirotzki pasaron completamente desapercibidas. Y sólo así se puede explicar que se considere a Marcel Deprez, como el iniciador de la transmisión de energía eléctrica. En su informe presentado en la Academia de Ciencias de París en 1881 enunció la tesis de que elevando la tensión, se puede transmitir una energía eléctrica de cualquier potencia a una gran distancia, con pérdidas mínimas. Al año siguiente, 1882, Marcel Deprez llevó a cabo la transmisión de una energía de 2 HP con corriente continua, a una distancia de 57 km y bajo una tensión de 1.500-2.000 V.

De ahí que se reconozca como precursor del transporte de energía eléctrica a distancia, a Marcel Deprez.

Examinemos la teoría y el cálculo de los cuadripolos pasivos.

Destaquemos en el esquema eléctrico la rama que contiene la única fuente de f.e.m. E_1 , y cualquier otra de resistencia r (fig. 3-19, a). Consideremos el resto del esquema como un cuadripolo pasivo con bornes primarios, de entrada, 1-1' y bornes secundarios o de salida 2-2', incluyéndose la resistencia interna de la fuente de energía eléctrica, en el interior del cuadripolo.

Tomemos el sentido positivo de las intensidades I_1 e I_2 en las ramas de las tensiones U_1 y U_2 en los bornes, concordantes con el sentido de la f.e.m. y con la polaridad de los bornes de salida del cuadripolo indicado con "+" y "-". De acuerdo al teorema de la compensación, reemplacemos la resistencia r por una fuente de f.e.m. $E_2 = U_2 = rI_2$ (fig. 3-19, b) y, por el principio de superposición, escribamos las expresiones que nos dan las intensidades I_1 e I_2 :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= g_{11}E_1 - g_{12}E_2; \\ I_2 &= g_{21}E_1 - g_{22}E_2. \end{aligned} \right\} \quad (3-8)$$

En estas ecuaciones, las componentes de las intensidades dependientes de la f.e.m. E_2 están anotadas con signo negativo dado que su sentido es opuesto a las componentes producidas por la f.e.m. E_1 y opuesto al sentido elegido como positivo para las corrientes de intensidad I_1 e I_2 .

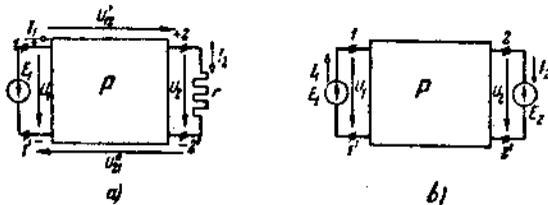


FIG. 3-19

La tensión U_1 en los bornes primarios del cuadripolo es igual a E_1 y la tensión U_2 en los bornes secundarios del mismo cuadripolo es igual a la f.e.m. E_2 . Reemplazando en las ecuaciones (3-8) las f.e.m. E_1 y E_2 por las tensiones, obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= g_{11}U_1 - g_{12}U_2; \\ I_2 &= g_{21}U_1 - g_{22}U_2. \end{aligned} \right\} \quad (3-9)$$

La solución simultánea de las ecuaciones (3-9) respecto a U_1 e I_1 nos da:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{g_{22}}{g_{21}} U_2 + \frac{1}{g_{21}} I_2; \\ I_1 &= \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{21}} U_2 + \frac{g_{11}}{g_{21}} I_2 \end{aligned}$$

o también

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= aU_2 + bI_2; \\ I_1 &= cU_2 + dI_2, \end{aligned} \right\} \quad (3-10)$$

donde

$$a = \frac{g_{22}}{g_{21}}; \quad b = \frac{1}{g_{21}}; \quad c = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{21}}; \quad d = \frac{g_{11}}{g_{21}}. \quad (3-11)$$

Las magnitudes a, b, c, d , se llaman *constantes del cuadripolo* y están ligadas entre sí por las siguientes relaciones:

$$ad - bc = \frac{g_{11}g_{22}}{g_{21}^2} = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{21}^2} = 1. \quad (3-12)$$

De las expresiones que determinan los coeficientes a, b, c y d , se deduce que sus valores sólo dependen de las resistencias o conductancias

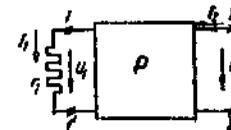


FIG. 3-20

y de la configuración del esquema del cuadripolo. Observemos que a y d tienen dimensión nula, b tiene la dimensión de la resistencia y c la dimensión de la conductancia.

Las (3-10) son las *ecuaciones fundamentales del cuadripolo*, que ligan las tensiones y las intensidades de entrada y salida, para cualquier carga que haya en los bornes de salida.

Si en el esquema del cuadripolo se intercambian de lugar la fuente de f.e.m. y la resistencia del receptor, es decir si se conecta a los bornes 1-1' la resistencia del receptor y a los bornes 2-2', la fuente de f.e.m. (fig. 3-20) y si se invierte el sentido de las corrientes I_1 e I_2 , las ecuaciones (3-10) tomarán la forma:

$$\begin{aligned} U_1 &= aU_2 - bI_2; \\ -I_1 &= cU_2 - dI_2. \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos, tomando en cuenta la (3-12):

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= dU_1 + bI_1; \\ I_2 &= cU_1 + aI_1. \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

Comparando estas ecuaciones con las (3-10), observamos que al sustituir los bornes primarios por los secundarios, los coeficientes a y d cambian de lugar entre sí.

El cuadripolo se llama *simétrico* cuando al hacer el intercambio de lugares entre la fuente de energía y el receptor, las intensidades en ambos no varían.

Las ecuaciones del cuadripolo simétrico deben permanecer invariables al hacerse la sustitución recíproca de los bornes primarios y secundarios. Por este motivo $a = d$, y la diferenciación entre bornes primarios y secundarios para los cuadripolos simétricos no tiene razón de ser. Todos los cuadripolos que no satisfacen a la condición mencionada se llaman asimétricos.

3-5. Determinación de las constantes del cuadripolo.

Los coeficientes de un cuadripolo pasivo asimétrico se determinan experimentalmente o por cálculo, siendo necesario, en este último caso, conocer las resistencias que forman el cuadripolo y su esquema de conexiones.

De las expresiones dadas para las constantes a , b , c y d se deduce que éstas se determinan mediante combinaciones diferentes de tres magnitudes constantes: g_{11} (conductancia propia por el lado de los bornes 1-1'), g_{22} (conductancia propia por el lado de los bornes 2-2') y $g_{12} = g_{21}$ (conductancia mutua). Por consiguiente, para determinar experimentalmente estas constantes basta tener los datos que permiten calcular, de una u otra manera, los valores de g_{11} , g_{22} y $g_{12} = g_{21}$. Si existe la posibilidad de medir simultáneamente las magnitudes primarias I_1 y U_1 como también las secundarias I_2 , U_2 , bastarán los datos de dos pruebas para obtener a , b , c , d .

Más sencillo es determinar las constantes en las pruebas de marcha en vacío y en cortocircuito.

Estando los bornes secundarios en marcha en vacío, es decir cuando $I_2 = 0$ la tensión primaria y la intensidad serán

$$U_{1v} = aU_2 \quad \text{e} \quad I_{1v} = cU_2,$$

de donde

$$a = \frac{U_{1v}}{U_2}; \quad c = \frac{I_{1v}}{U_2}. \quad (3-14)$$

En este caso, la resistencia de entrada del lado de los bornes primarios será

$$r_{1v} = \frac{U_{1v}}{I_{1v}} = \frac{a}{c}. \quad (3-15)$$

Estando los bornes secundarios en corto circuito, es decir cuando $U_2 = 0$,

$$U_{1c} = bI_2 \quad \text{e} \quad I_{1c} = dI_2,$$

de donde

$$b = \frac{U_{1c}}{I_2}; \quad d = \frac{I_{1c}}{I_2}. \quad (3-16)$$

Al mismo tiempo, la resistencia de entrada del lado de los bornes primarios, será

$$r_{1c} = \frac{U_{1c}}{I_{1c}} = \frac{b}{d}. \quad (3-17)$$

Por consiguiente, habiendo obtenido los valores de U_{1v} , I_{1v} y U_2 en marcha en vacío y los de U_{1c} , I_{1c} , I_2 en corto circuito, será fácil determinar las cuatro constantes del cuadripolo.

Las constantes del cuadripolo pueden también calcularse, midiendo en cada experiencia la tensión y la intensidad primarias o secundarias. Procediendo así, es necesario tener los datos de tres pruebas, dos de las cuales se efectúan alimentando el cuadripolo del lado de los bornes primarios, y la otra con alimentación del lado de los secundarios, o viceversa.

Determinemos las constantes a , b , c , d , haciendo las pruebas de marcha en vacío y de cortocircuito, con alimentación por el lado de los bornes secundarios, y la prueba de marcha en vacío con alimentación por los bornes primarios.

Alimentando el cuadripolo por el lado de los bornes secundarios y para $U_1 = 0$, tendremos de las ecuaciones (3-13)

$$U_{2c} = bI_1; \quad I_{2c} = aI_1,$$

de donde la resistencia de entrada del lado de los bornes secundarios, estando en cortocircuito los primarios, será

$$r_{2c} = \frac{U_{2c}}{I_{2c}} = \frac{b}{a}. \quad (3-18)$$

Alimentando el cuadripolo por el lado de los bornes secundarios y para $I_1 = 0$, tenemos de acuerdo a las ecuaciones (3-13)

$$U_{2v} = dU_1; \quad I_{2v} = cU_1, \quad (3-19)$$

de donde la resistencia de entrada, estando los primarios en marcha en vacío, será

$$r_2 = \frac{U_{2v}}{I_{2v}} = \frac{d}{c}. \quad (3-20)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (3-15), (3-18) y (3-20) y tomando en cuenta la (3-12), obtendremos

$$a = \pm \sqrt{\frac{r_{1r}}{r_{2v} - r_{2c}}} \quad (3-21)$$

La constante a puede tener tanto signo positivo como negativo. Sin embargo, de acuerdo a la polaridad elegida (fig. 3-19, a) y de acuerdo

a las ecuaciones (3-10), el coeficiente determinado por la fórmula (3-21) debe tomarse con el signo prefijado (ver ejemplo 3-3).

Teniendo a es fácil hallar los valores de los coeficientes restantes

$$b = ar_{2r}; \quad c = \frac{a}{r_{1v}}; \quad d = \frac{r_{2v}}{r_{1v}} a. \quad (3-22)$$

Para verificar la exactitud de los cálculos, puede recurrirse a una cuarta experiencia, poniendo en cortocircuito los bornes secundarios y alimentando el cuadripolo del lado de los primarios.

Es necesario destacar que las resistencias r_{1v} , r_{1c} , r_{2r} y r_{2c} están ligadas entre sí por las relaciones $\frac{r_{1v}}{r_{2r}} = \frac{r_{1c}}{r_{2c}} = \frac{a}{d}$ que, para el cuadripolo simétrico, son iguales a la unidad ($a = d$). De las ecuaciones (3-21) y (3-22) se deduce que para determinar las constantes del cuadripolo simétrico en el cual $a = d$, basta obtener los datos de las experiencias de marcha en vacío y de cortocircuito.

Las constantes del cuadripolo pueden determinarse también por las fórmulas (3-11), con los datos de las mismas experiencias.

3-6. Régimen del cuadripolo en carga.

De las ecuaciones (3-10) se ve que tanto la tensión U_1 como la intensidad I_1 , en los bornes primarios, constan de dos componentes, una de las cuales es proporcional a la tensión U_2 y la otra, a la intensidad I_2 .

Sean dadas la tensión U_2 y la intensidad I_2 . Si en régimen de marcha en vacío ($I_2 = 0$) se establece una tensión U_2 en los bornes secundarios, igual a la tensión existente en carga, entonces la tensión y la intensidad en los bornes de entrada, serán

$$U_{1v} = aU_2; \quad I_{1v} = cU_2.$$

Si estando los bornes secundarios en cortocircuito ($U_2 = 0$) se establece una intensidad I_2 igual a la de carga, la tensión y la intensidad en los bornes primarios serán

$$U_{1c} = bI_2; \quad I_{1c} = dI_2.$$

Sumando las tensiones y las intensidades de los regímenes de marcha en vacío y de cortocircuito, respectivamente, obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= aU_2 + bI_2 = U_{1v} + U_{1c} \\ I_1 &= cU_2 + dI_2 = I_{1v} + I_{1c} \end{aligned} \right\} \quad (3-23)$$

Estas ecuaciones expresan el conocido principio de superposición. Dicho de otro modo, para obtener la tensión U_2 y la intensidad I_2 en

los bornes secundarios del cuadripolo, es necesario establecer en los bornes primarios, la tensión U_{1v} y la intensidad I_{1v} proporcionales a U_2 como también la tensión U_{1c} y la intensidad I_{1c} , proporcionales a I_2 .

La transmisión de energía desde la fuente de f.e.m. a un receptor a través de un cuadripolo, se caracteriza por las relaciones entre la potencia $P_1 = U_1 I_1$ en los bornes de entrada, las pérdidas que se producen en el cuadripolo y la potencia $P_2 = U_2 I_2$ en la carga.

La relación entre la potencia de la carga y la potencia en los bornes de entrada, se llama *rendimiento del cuadripolo*. Busquemos para qué relación entre la resistencia r y las constantes del cuadripolo, el rendimiento será máximo. A tal efecto, expresemos el rendimiento en función de las constantes del cuadripolo y de la resistencia de la carga r .

La intensidad I_2 en la resistencia de la carga r se determina por medio de la tensión U_2 , de las constantes del cuadripolo y de la resistencia r de la ecuación

$$U_1 = aU_2 + bI_2 = (b + ar)I_2$$

en la forma siguiente:

$$I_2 = \frac{U_1}{b + ar}.$$

La potencia del receptor será:

$$P_2 = rI_2^2 = \frac{U_1^2 r}{(b + ar)^2}.$$

La potencia en los bornes de entrada del cuadripolo es:

$$P_1 = U_1 I_1 = U_1 (cU_2 + I_2) = U_1 (d + cr) I_2 = U_1^2 \frac{d + cr}{b + ar}.$$

El rendimiento del cuadripolo estará dado por

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{r}{(d + cr)(b + ar)}. \quad (3-24)$$

Hallaremos la resistencia r para la cual el rendimiento alcanza un máximo haciénd

$$\frac{d\eta}{dr} = 0,$$

de donde

$$r^2 = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} = r_{2c} \cdot r_{2r},$$

o también

$$r = \sqrt{r_{2c} \cdot r_{2r}}.$$

Problema 3-3. En el cuadripolo representado en la figura 3-21, *a*, se conocen las resistencias de las ramas: $r_1 = 1 \Omega$, $r_2 = 3 \Omega$, $r_3 = 2 \Omega$ y $r_4 = 2 \Omega$. Determinar las constantes *a*, *b*, *c* y *d* del cuadripolo aplicando las fórmulas (3-21) y (3-22) y también las (3-14) y (3-16).

Solución. Para determinar la constante *a* por la fórmula (3-21) hallemos las resistencias r_{1v} , r_{2v} y r_{2c} :

$$r_{1v} = \frac{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}{r_1 + r_2 + r_3 + r_4} = \frac{4 \cdot 4}{8} = 2 \Omega;$$

$$r_{2v} = \frac{(r_1 + r_3)(r_2 + r_4)}{r_1 + r_3 + r_2 + r_4} = \frac{3 \cdot 5}{8} = 1,875 \Omega;$$

$$r_{2c} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + \frac{r_3 r_4}{r_3 + r_4} = \frac{3}{4} + 1 = 1,75 \Omega.$$

Por consiguiente, las constantes serán:

$$a = \sqrt{\frac{r_{1v}}{r_{2v} \cdot r_{2c}}} = \sqrt{\frac{2}{1,875 \cdot 1,75}} = 4;$$

$$c = \frac{a}{r_{1r}} = \frac{4}{2} = 2 \frac{1}{\Omega};$$

$$b = a \cdot r_{2c} = 4 \cdot 1,75 = 7 \Omega;$$

$$d = c \cdot r_{2v} = 3,75.$$

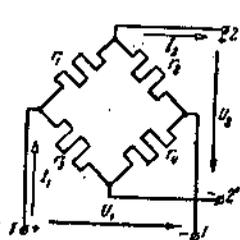


FIG. 3-21 a

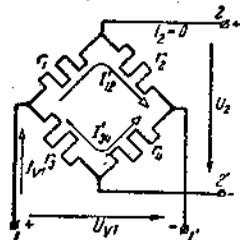


FIG. 3-21 b

La exactitud de las constantes se puede controlar sustituyéndolas en la expresión $cd - bc = 1$.

Hallemos las constantes del mismo cuadripolo aplicando las fórmulas (3-14) y (3-16)

$$a = \frac{U_{1v}}{U_2}; \quad c = \frac{I_{1c}}{I_2}; \quad b = \frac{U_{1c}}{I_2} \quad \text{y} \quad d = \frac{I_{1c}}{I_2}.$$

Sea para $I_2 = 0$ el sentido positivo de la tensión U_{1v} y de la intensidad I_{1v} concordante con la polaridad de la fuente de f.e.m. y elijamos el sentido positivo

de la tensión U_2 arbitrariamente (fig. 3-21, *b*). Expresemos la tensión U_{1v} y la intensidad I_{1v} en función de la tensión U_2 y de las resistencias del cuadripolo:

$$U_{1v} = r_1 I_{12} + r_2 I_{12};$$

$$U_{3v} = r_3 I'_{34} + r_4 I'_{34};$$

$$U_2 = r_2 I'_{12} - r_4 I'_{34};$$

$$I_{1v} = I_{12} + I'_{34}.$$

La solución simultánea de esas ecuaciones nos da, después de algunas transformaciones:

$$U_{1v} = \frac{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}{r_2 r_3 - r_1 r_4} U_2;$$

$$I_{1v} = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{r_2 r_3 - r_1 r_4} U_2.$$

Por consiguiente, las constantes del cuadripolo serán:

$$a = \frac{(r_1 + r_2)(r_3 + r_4)}{r_2 r_3 - r_1 r_4};$$

$$c = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{r_2 r_3 - r_1 r_4}.$$

Sustituyendo en estas fórmulas los valores numéricos, obtenemos $a = 4$ y $c = 2 \frac{1}{\Omega}$ de signo positivo. Los signos positivos de las constantes indican que el potencial del punto 2 es más alto que el potencial del punto 2' y el sentido real de la tensión U_2 coincide con el sentido positivo dado en la figura 3-21, *b*.

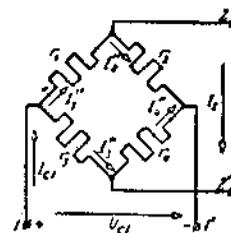


FIG. 3-21 c

Si en el esquema dado, para los mismos sentidos positivos de U_{1v} , I_{1v} y U_2 (fig. 3-21, *b*) se satisface la desigualdad $r_2 \cdot r_3 < r_1 r_4$, los valores numéricos de las constantes *a* y *c* serán negativos y el sentido real de la tensión U_2 será opuesto al tomado como positivo.

Para determinar las constantes *b* y *d* recurramos al esquema de la figura 3-21, *c*, donde los bornes de salida del cuadripolo están en cortocircuito ($U_2 = 0$). Sean los sentidos positivos de U_{1c} y de I_{1c} dados del mismo modo que en el caso anterior y elijamos arbitrariamente el sentido positivo de la intensidad I_2 (fig.

3-21, c). Expresemos la tensión U_{1c} y la intensidad I_{1c} por medio de la intensidad I_2 y de la resistencia del cuadripolo

$$\begin{aligned} U_{1c} &= r_1 I_1'' + r_2 I_2'' = r_3 I_3'' + r_4 I_4''; \\ r_1 I_1'' &= r_3 I_3''; \\ r_2 I_2'' &= r_4 I_4''; \\ I_{1c} &= I_1'' + I_3''; \\ I_1'' &= I_2'' + I_2; \end{aligned}$$

La solución simultánea de estas ecuaciones nos da:

$$U_{1c} = \frac{r_1 r_3 (r_2 + r_4) + r_2 r_4 (r_1 + r_3)}{r_2 r_3 - r_1 r_4} \cdot I_2$$

e

$$I_{1c} = \frac{(r_1 + r_3)(r_2 + r_4)}{r_2 r_3 - r_1 r_4} I_2.$$

Luego, las constantes serán:

$$\begin{aligned} b &= \frac{r_1 r_3 (r_2 + r_4) + r_2 r_4 (r_1 + r_3)}{r_2 r_3 - r_1 r_4}; \\ d &= \frac{(r_1 + r_3)(r_2 + r_4)}{r_2 r_3 - r_1 r_4}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en estas fórmulas los valores numéricos obtenemos $b = 7 \Omega$ y $d = 3,75$ de signo positivo que indica que el sentido positivo elegido para la intensidad I_2 en la figura 3-21, c coincide con su sentido real en el esquema dado.

Si se considera que en las ecuaciones fundamentales del cuadripolo (3-10) que caracterizan el régimen del servicio en carga, figuran las cuatro constantes, el sentido de la intensidad I_1 quedará determinado por el sentido de la tensión U_2 (o a la inversa), del borne 2 al 2' (fig. 3-21, a), circunstancia que conviene recordar al determinar los coeficientes por este método. En otras palabras, si para una polaridad dada en los bornes de entrada, se halla la polaridad de los bornes de salida según la tensión, no hay necesidad de determinarla según la intensidad, ya que el sentido de la tensión U_2 en los bornes del receptor pasivo coincide con el de la corriente I_2 .

3-7. Esquemas equivalentes de los cuadripolos.

Se ha indicado anteriormente que cualquier cuadripolo pasivo con bornes primarios y secundarios dados se caracteriza por tres constantes

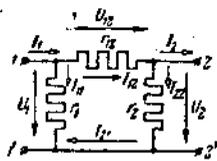


Fig. 3-22

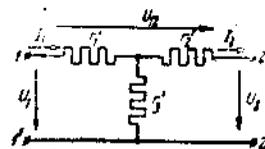


Fig. 3-23

independientes, circunstancia que nos permite representar el cuadripolo pasivo como un *esquema equivalente en II*, (fig. 3-22) o un *esquema equivalente en T* (fig. 3-23).

Para determinar los elementos del esquema en II (fig. 3-22) utilizemos las ecuaciones (3-9), sumemos y restemos $g_{12}U_1$ al segundo miembro de la ecuación que determina la intensidad I_1 y, en la ecuación que da I_2 , sumemos y restemos $g_{21}U_2$ al segundo miembro; obtendremos como resultado:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= (g_{11} - g_{12})U_1 + (U_1 - U_2)g_{12} = I_{11} + I_{12}; \\ I_2 &= (U_1 - U_2)g_{21} - (g_{22} - g_{21})U_2 = I_{21} - I_{22}, \end{aligned} \right\} \quad (3-25)$$

donde

$$\begin{aligned} I_{11} &= (g_{11} - g_{12})U_1; \\ I_{12} &= (U_1 - U_2)g_{12} = (U_1 - U_2)g_{21} = I_{21}; \\ I_{22} &= (g_{22} - g_{21})U_2; \end{aligned}$$

El esquema equivalente de la figura 3-22, donde $U_{12} = (U_1 - U_2) = (U'_{12} + U'_{21})$ (ver fig. 3-9) satisface a las ecuaciones obtenidas.

Los elementos de dicho esquema son:

$$r_{12} = \frac{1}{g_{12}}; \quad r_1 = \frac{1}{g_{11} - g_{12}}; \quad r_2 = \frac{1}{g_{22} - g_{21}}. \quad (3-26)$$

Aplicando las ecuaciones (3-26) y (3-11) es fácil expresar los elementos del esquema equivalente en función de las constantes del cuadripolo:

$$r_{12} = b; \quad r_1 = \frac{b}{d-1}; \quad r_2 = \frac{b}{a-1}. \quad (3-27)$$

Los elementos del esquema en T se calculan por las fórmulas de transformación (2-7) de un triángulo de resistencias (fig. 3-22) en una estrella equivalente (fig. 3-23):

$$\left. \begin{aligned} r'_1 &= \frac{r_{12}r_1}{r_{12} + r_1 + r_2}; \\ r'_2 &= \frac{r_{12}r_2}{r_{12} + r_1 + r_2}; \\ r'_3 &= \frac{r_1r_2}{r_{12} + r_1 + r_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3-28)$$

Hecha la sustitución de r_{12} , r_1 y r_2 de acuerdo a (3-27), obtenemos:

$$r'_1 = \frac{a-1}{c}; \quad r'_2 = \frac{d-1}{c}; \quad r'_3 = \frac{1}{c}. \quad (3-29)$$

De modo que, conociendo las constantes del cuádrupolo, es fácil encontrar los elementos de los esquemas en II y en T. Señalemos que en los esquemas equivalentes de ambas formas, los bornes 1' y 2' han quedado unidos entre sí eléctricamente por un solo hilo y en consecuencia la tensión U_{12} entre los puntos 1 y 2 es igual en los esquemas a la diferencia $U_1 - U_2$, lo cual, por cierto, no cambia los valores de las intensidades I_1 e I_2 ni de las tensiones U_1 y U_2 reales.

Todos los cuádrupolos en los cuales no están dados los pares de bornes para la conexión de la fuente de energía y del receptor, se caracterizan en general por seis constantes. De allí que los esquemas equivalentes de los cuádrupolos de este tipo contienen seis elementos.

Destaquemos de un esquema eléctrico cualquiera, una cierta parte que no contenga fuentes de f.e.m. y que tenga cuatro polos. Atribuyamos a cada polo una intensidad y un potencial respecto a un punto O arbitrario pero común a todos los polos.

Si modificamos el régimen en el interior del cuádrupolo pasivo ni en sus bornes, completamos el sistema examinado hasta cerrarlo, conectando entre el punto común y cada polo una fuente con una f.e.m. igual al potencial del polo correspondiente (fig. 3-24).

Basándonos en el principio de superposición (1-48) escribamos las expresiones (1-48) para dar las intensidades del cuádrupolo:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= E_1 g_{11} - E_2 g_{12} - E_3 g_{13} - E_4 g_{14} \\ I_2 &= -E_1 g_{21} + E_2 g_{22} - E_3 g_{23} - E_4 g_{24} \\ I_3 &= -E_1 g_{31} - E_2 g_{32} + E_3 g_{33} - E_4 g_{34} \\ I_4 &= -E_1 g_{41} - E_2 g_{42} - E_3 g_{43} + E_4 g_{44} \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

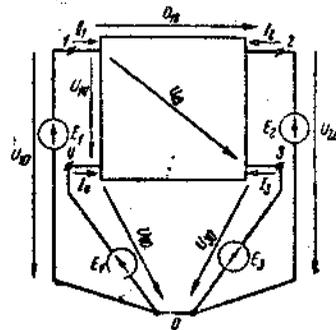


FIG. 3-24

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, reemplacemos, en estas ecuaciones, todas las f.e.m. por las tensiones existentes entre aquel polo para el cual se busca la intensidad, y los polos restantes. Por ejemplo, en la expresión dada para I_1 reemplacemos las f.e.m. E_1, E_2, E_3 y E_4 por sus iguales:

$$\begin{aligned} E_1 &= U_{10} \\ E_2 &= -U_{12} + U_{10} \\ E_3 &= -U_{13} + U_{10} \\ E_4 &= -U_{14} + U_{10} \end{aligned}$$

Tendremos como resultado:

$$I_1 = U_{10}(g_{11} - g_{12} - g_{13} - g_{14}) + U_{12}g_{12} + U_{13}g_{13} + U_{14}g_{14} \quad (3-31)$$

Análogamente, para las intensidades I_2, I_3 e I_4 tendremos:

$$\left. \begin{aligned} I_2 &= U_{20}(g_{22} - g_{21} - g_{23} - g_{24}) + U_{21}g_{21} + U_{23}g_{23} + U_{24}g_{24} \\ I_3 &= U_{30}(g_{33} - g_{31} - g_{32} - g_{34}) + U_{31}g_{31} + U_{32}g_{32} + U_{34}g_{34} \\ I_4 &= U_{40}(g_{44} - g_{41} - g_{42} - g_{43}) + U_{41}g_{41} + U_{42}g_{42} + U_{43}g_{43} \end{aligned} \right\} \quad (3-32)$$

En estas ecuaciones, las tensiones entre los polos están ligadas por las igualdades: $U_{12} = -U_{21}$; $U_{23} = -U_{32}$, etc.

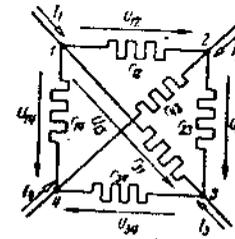


FIG. 3-25

Como la suma de las intensidades $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$, para cualquier E_1, E_2, E_3 y E_4 , tendremos las ecuaciones (3-30):

$$\begin{aligned} g_{11} - g_{12} - g_{13} - g_{14} &= 0; \\ g_{22} - g_{21} - g_{23} - g_{24} &= 0; \\ g_{33} - g_{31} - g_{32} - g_{34} &= 0; \\ g_{44} - g_{41} - g_{42} - g_{43} &= 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} I_1 &= U_{12}g_{12} + U_{13}g_{13} + U_{14}g_{14} \\ I_2 &= U_{21}g_{21} + U_{23}g_{23} + U_{24}g_{24} \\ I_3 &= U_{31}g_{31} + U_{32}g_{32} + U_{34}g_{34} \\ I_4 &= U_{41}g_{41} + U_{42}g_{42} + U_{43}g_{43} \end{aligned}$$

Las ecuaciones obtenidas son satisfechas por el esquema equivalente que tiene la forma de un cuadrilátero completo (fig. 3-25), cuyas resistencias están dadas por:

$$r_{12} = \frac{1}{g_{12}}; \quad r_{23} = \frac{1}{g_{23}}; \quad r_{34} = \frac{1}{g_{34}}; \quad \text{etc.} \quad (3-33)$$

Análogamente se pueden determinar los parámetros de un esquema equivalente para un múltiplo pasivo cuyo número de polos sea mayor de cuatro (B.7).

3-8. Ecuaciones fundamentales y esquemas equivalentes de un cuádrupolo activo.

En la figura 3-26 se muestra convencionalmente un cuádrupolo activo a cuyos bornes primarios de entrada está conectada una fuente de f.e.m. E_1 , y a los secundarios de salida, la resistencia r . En virtud del teorema de compensación, susti-

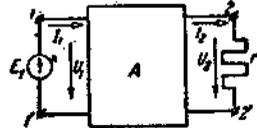


FIG. 3-26

tuyamos la resistencia r por la fuente de f.e.m. $E_2 = rI_2$, y por el principio de superposición escribamos las fórmulas que nos dan I_1 e I_2 :

$$\begin{cases} I_1 = E_1 g_{11} - E_2 g_{12} + E_3 g_{13} + E_4 g_{14} + \dots \\ I_2 = E_1 g_{21} - E_2 g_{22} + E_3 g_{23} + E_4 g_{24} + \dots \end{cases} \quad (3-34)$$

Reemplacemos en estas ecuaciones, las f.e.m. E_1 y E_2 por las tensiones correspondientes, y designemos las componentes de las intensidades, producidas por las f.e.m. restantes (E_3, E_4 , etc.) que se encuentra dentro del cuádrupolo por las expresiones

$$I_{1a} = E_3 g_{13} + E_4 g_{14} + \dots$$

e

$$I_{2a} = E_3 g_{23} + E_4 g_{24} + \dots$$

Entonces:

$$\begin{cases} I_1 = g_{11}U_1 - g_{12}U_2 + U_{1a} \\ I_2 = g_{21}U_1 - g_{22}U_2 + U_{2a} \end{cases} \quad (3-35)$$

De las ecuaciones obtenidas (3-35) se desprende que para las tensiones $U_1 = 0$ y $U_2 = 0$, las intensidades de cortocircuito $I_{1c} = I_{1a}$ y $I_{2c} = I_{2a}$. A diferencia del cuádrupolo pasivo, las intensidades I_{1c} e I_{2c} se determinan poniendo simultáneamente en cortocircuito los bornes primarios y secundarios del cuádrupolo activo.

Resolvamos las ecuaciones (3-35) respecto a la tensión y a la intensidad primarias:

$$U_1 = \frac{g_{22}}{g_{21}} U_2 + \frac{1}{g_{21}} (I_2 - I_{2c});$$

$$I_1 = \frac{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}{g_{21}} U_2 + \frac{g_{11}}{g_{21}} (I_2 - I_{2c}) + I_{1c};$$

o también

$$\begin{cases} U_1 = aU_2 + b(I_2 - I_{2c}); \\ I_1 - I_{1c} = cU_2 + d(I_2 - I_{2c}), \end{cases} \quad (3-36)$$

donde las magnitudes a, b, c y d son las constantes del cuádrupolo, que satisfacen, igual que en el cuádrupolo pasivo, a la condición $ad - bc = 1$.

De las ecuaciones fundamentales se deduce (3-36) que cualquier cuádrupolo activo con bornes primarios y secundarios dados, se caracteriza por cinco magni-

tudes independientes (tres constantes y las intensidades I_{1c} e I_{2c}); de allí que pueda representarse por un esquema equivalente de cinco elementos.

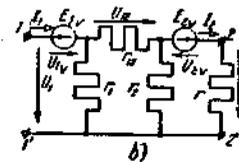
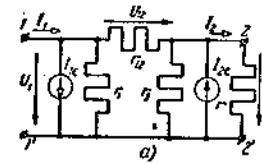


FIG. 3-27

Para determinar los parámetros, por ejemplo, de un esquema equivalente en Π utilizemos las ecuaciones (3-35) y (del mismo modo que en el caso de un cuádrupolo pasivo) sumemos y restemos $g_{12}U_1$ en la expresión que da la intensidad I_1 ; así también en la fórmula I_2 sumemos y restemos el término $g_{21}U_2$, obteniendo como resultado:

$$\begin{cases} I_1 = (g_{11} - g_{12})U_1 + g_{12}(U_1 - U_2) + I_{1c}; \\ I_2 = g_{21}(U_1 - U_2) - (g_{22} - g_{21})U_2 + I_{2c}. \end{cases} \quad (3-37)$$

Estas ecuaciones son satisfechas por el esquema equivalente de la figura 3-27, a. Examinándolo, vemos que las fuentes de energía que se encuentran en el interior del cuádrupolo, están representadas en el esquema equivalente por fuentes de intensidad I_{1c} e I_{2c} .

Las fuentes de energía del cuádrupolo pueden también representarse en el esquema equivalente (fig. 3-27, b) por fuentes de f.e.m. E_{1v} y E_{2v} , que se determinan poniendo simultáneamente en circuito abierto las ramas conectadas a los bornes primarios y secundarios del cuádrupolo activo.

Utilizando las ecuaciones (3-36) establezcamos el vínculo entre las tensiones E_{1v} y E_{2v} y las intensidades I_{1c} e I_{2c} , partiendo de la condición de que, poniendo simultáneamente en circuito abierto los bornes primarios y secundarios, $I_1 = 0$ e $I_2 = 0$, es decir:

$$\begin{cases} U_{1v} = aU_{2v} - bI_{2c}; \\ -I_{1c} = cU_{2v} - dI_{2c}. \end{cases}$$

De estas ecuaciones deducimos:

$$\begin{cases} E_{1v} = U_{1v} = \frac{1}{c} I_{2c} - \frac{a}{c} I_{1c}; \\ E_{2v} = U_{2v} = \frac{d}{c} I_{2c} - \frac{1}{c} I_{1c}. \end{cases} \quad (3-38)$$

La parte pasiva del esquema en Π puede transformarse dándosele la forma T. Debemos señalar que las constantes del cuádrupolo activo (a, b, c y d) y los

parámetros de las partes pasivas de sus esquemas equivalentes no dependen de las f.e.m. de las fuentes y son iguales a las constantes y a los parámetros correspondientes del cuadripolo pasivo, debiendo tomarse en cuenta la resistencia interna de las fuentes de energía. Al mismo tiempo los parámetros activos de los esquemas equivalentes I_{1c} , I_{2c} , E_{1v} , E_{2v} dependen de los elementos, tanto activos como pasivos del cuadripolo dado.

3-9. Distribución de la tensión y de la intensidad en una línea con pérdidas.

Al analizar los regímenes de una línea de transmisión de longitud reducida, se pueden despreciar las pérdidas de corriente entre los conductores y considerar la resistencia de éstos, concentrada. En esas condiciones, la caída de tensión por unidad de longitud de una línea constituida por conductores de sección uniforme y de igual material, tiene en toda su longitud el mismo valor.

Anteriormente (Cap. 1-2) se demostró que, para tomar en consideración la influencia de los hilos de la línea en su recorrido de ida y vuelta y de la imperfección de la aislación entre ellos sobre la distribución de la tensión y de la intensidad a lo largo de la línea, se utilizaban las magnitudes, r_0 , resistencia de los conductores y g_0 , conductancia entre los conductores, por unidad de longitud. Recordemos que la resistencia r_0 se determina por la fórmula conocida:

$$r_0 = \rho \frac{1}{S};$$

y la conductancia g_0 se halla en la mayoría de los casos por medio de fórmulas deducidas de las experiencias.

Busquemos la ley de variación de la tensión y de la intensidad en una línea homogénea, caracterizada por una distribución uniforme de la resistencia y de la conductancia en toda su longitud. Una línea de este tipo se puede representar, como ya se dijo con anterioridad, por un esquema equivalente (fig. 1-9). Destaquemos del esquema de la figura 1-9 un elemento situado a una distancia x del extremo de la línea (fig. 3-28), equivalente a un elemento de longitud dx de la línea. Las variaciones de tensión dU_x y de intensidad dI_x en el elemento dx , serán:

$$dU_x = r_0 dx I_x;$$

$$dI_x = g_0 dx U_x.$$

o también

$$\frac{dU_x}{dx} = r_0 I_x; \quad (3-39)$$

$$\frac{dI_x}{dx} = g_0 U_x.$$

Estas ecuaciones diferenciales permiten hallar, dadas las condiciones de los límites, la tensión y la intensidad como funciones de x . Diferenciando respecto a x las ecuaciones (3-39) obtenemos:

$$\frac{d^2 U_x}{dx^2} = r_0 g_0 U_x; \quad (3-40)$$

$$\frac{d^2 I_x}{dx^2} = r_0 g_0 I_x.$$

La estructura de ambas ecuaciones muestra que las variaciones de la tensión y de la intensidad a lo largo de la línea se producen según una misma ley. En efecto, si la solución de la primera de las ecuaciones (3-40) nos da una suma de dos funciones exponenciales

$$U_x = A_1 e^{\beta x} + A_2 e^{-\beta x} \quad (3-41)$$

la solución de la segunda será la diferencia de esas mismas funciones, multiplicada por cierta magnitud constante, es decir

$$I_x = \frac{1}{r_0} \frac{dU_x}{dx} = \frac{\beta}{r_0} (A_1 e^{\beta x} - A_2 e^{-\beta x}) =$$

$$= \sqrt{\frac{g_0}{r_0}} (A_1 e^{\beta x} - A_2 e^{-\beta x}) =$$

$$= \frac{1}{r_c} (A_1 e^{\beta x} - A_2 e^{-\beta x}); \quad (3-42)$$

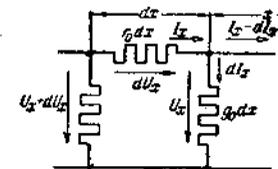


FIG. 3-28

donde $\beta = \sqrt{r_0 g_0}$ es el coeficiente de atenuación;

$r_c = \sqrt{\frac{r_0}{g_0}}$ es la resistencia característica;

A_1 y A_2 son las constantes de integración de las ecuaciones diferenciales, que se determinan de las condiciones de los límites.

Sean dadas la tensión U_2 y la intensidad I_2 en el extremo de la línea ($x = 0$). Sustituyendo U_2 , I_2 y $x = 0$ en las ecuaciones (3-41) y (3-42), obtendremos:

$$A_1 + A_2 = U_2;$$



La solución simultánea de esas ecuaciones nos da:

$$A_1 = \frac{1}{2} (U_2 + r_c I_2);$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (U_2 - r_c I_2).$$

Después de sustituir las constantes de integración de las (3-41) y (3-42) tendremos:

$$\left. \begin{aligned} U_x &= \frac{1}{2} (U_2 + r_c I_2) e^{\beta x} + \frac{1}{2} (U_2 - r_c I_2) e^{-\beta x}; \\ I_x &= \frac{1}{2 r_c} (U_2 + r_c I_2) e^{\beta x} - \frac{1}{2 r_c} (U_2 - r_c I_2) e^{-\beta x}. \end{aligned} \right\} \quad (3-43)$$

Agrupando los términos en U_2 y en I_2 , obtenemos las ecuaciones que determinan la tensión y la intensidad en cualquier punto de la línea.

$$U_x = \frac{1}{2} U_2 (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) + \frac{1}{2} r_c I_2 (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) = U_2 \operatorname{ch} \beta x + r_c I_2 \operatorname{sh} \beta x;$$

$$I_x = \frac{1}{2} I_2 (e^{\beta x} + e^{-\beta x}) + \frac{1}{2} \frac{U_2}{r_c} (e^{\beta x} - e^{-\beta x}) = I_2 \operatorname{ch} \beta x + \frac{U_2}{r_c} \operatorname{sh} \beta x.$$

De las ecuaciones (3-41) y (3-42) se ve que la tensión y que la intensidad en cualquier punto de la línea se determinan por las sumas algebraicas de las ordenadas de las curvas exponenciales. Las ordenadas de la curva $e^{\beta x}$ disminuyen en el mismo sentido de la coordenada

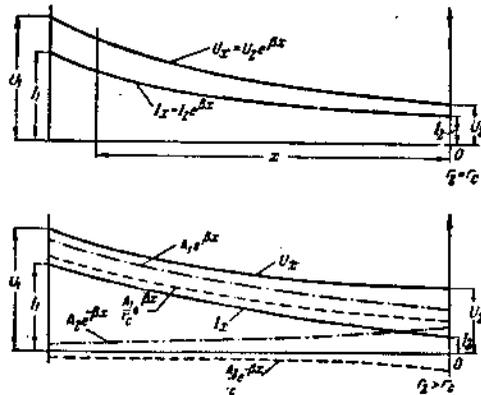


FIG. 3-29

x , es decir desde la fuente al consumidor, y las ordenadas de la curva $e^{-\beta x}$ disminuyen en el sentido en el que aumentan las coordenadas x , es decir desde el consumidor hacia la fuente. De las mismas ecuaciones

se ve que la relación entre las componentes de la tensión y la intensidad correspondientes, en cualquier punto de la línea, es igual a la resistencia característica r_c .

El régimen de transmisión de energía por una línea depende de la relación entre la resistencia del receptor r_2 y la resistencia característica de la línea r_c .

Tiene un particular significado el caso en que la resistencia del receptor $r_2 = \frac{U_2}{I_2}$ y la resistencia característica r_c de la línea son iguales entre sí. Entonces, la tensión y la intensidad en cualquier punto de la línea se determinan de acuerdo a las (3-43) según las ecuaciones simples siguientes:

$$\begin{aligned} U_x &= U_2 e^{\beta x}; \\ I_x &= \frac{U_2}{r_2} e^{\beta x} = \frac{U_2}{r_c} e^{\beta x}. \end{aligned}$$

De esas expresiones se ve que la tensión y la intensidad en cualquier punto de la línea se determinan por las ordenadas de las curvas exponenciales que decrecen desde la fuente hacia el receptor. La intensidad en cualquier punto de la línea se obtiene dividiendo simplemente las ordenadas que dan la tensión en el punto elegido, por la resistencia $r_2 = r_c$.

Cuando $r_2 > r_c$, la tensión U_x en cualquier punto de la línea se determina sumando las ordenadas de las dos curvas exponenciales, de la tensión, y la intensidad I_x , restando los valores absolutos de las ordenadas de las curvas exponenciales de la intensidad. Para el caso en que $r_2 < r_c$, la relación entre las componentes de la tensión y entre las de la intensidad será inversa.

En la figura 3-29 se han construido los gráficos de variación de la tensión y de la intensidad a lo largo de la línea para $r_2 = r_c$ y $r_2 > r_c$.

La línea de transmisión puede considerarse como un cuadripolo simétrico y ser sustituida por un esquema en Π o en T (Cap. 1-15, tomo II).

CAPÍTULO IV

CIRCUITOS ELECTRICOS CON CONDENSADORES

4-1. Características generales de los circuitos eléctricos con condensadores.

Además de las resistencias, suele haber capacidades en los esquemas de cálculo de los circuitos eléctricos.

La *capacidad C*, como elemento de un circuito (fig. 4-1) caracteriza la propiedad de un condensador de retener una carga en sus electrodos. El condensador que en la práctica más se acerca al ideal es el que tiene un dieléctrico gaseoso no habiendo una ionización apreciable del medio. La capacidad *C* de un condensador puede darse como una relación entre la carga *q* y la diferencia de potenciales en sus electrodos, *U*

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (4-1)$$

La capacidad de cualquier condensador real está definida por la forma y las dimensiones geométricas de los conductores y por las propiedades dieléctricas del medio que llena el espacio existente entre aquellos.

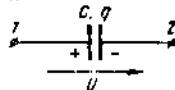


Fig. 4-1

Examinemos los métodos de cálculo de los *circuitos eléctricos con condensadores*; estos constituyen un agrupamiento de fuentes de f.e.m. y de condensadores ideales de cierta capacidad unidos con conductores y habiendo equilibrio estático de cargas en los electrodos de los condensadores.

En los casos más diversos se presenta la necesidad de calcular esquemas de este tipo.

Por ejemplo, cuando en los circuitos formados por condensadores reales se conectan fuentes de f.e.m. continua, la distribución de las tensiones y de las cargas en los condensadores, se determina al prin-

cipio por las f.e.m. y las capacidades y, prácticamente, no depende de las resistencias ni de los dieléctricos.

Para ilustrar lo dicho examinemos dos condensadores acoplados en serie de capacidad C_1 y C_2 , y cuyos dieléctricos tienen resistencias r_1 y r_2 (fig. 4-2, a). Al conectar estos condensadores con la fuente de f.e.m. E , en el momento inicial se producirán en los electrodos, tensiones U_1 y U_2 cuya suma será igual a la tensión de la fuente de f.e.m. Las cargas en los electrodos de ambos condensadores, en el momento inicial serán iguales entre sí:

$$q_1 = C_1 U_1 = q_2 = C_2 U_2 \quad (4-2 a)$$

De aquí vemos que las tensiones U_1 y U_2 , en ese momento, serán inversamente proporcionales a las capacidades de los condensadores, lo cual equivale a una resistencia nula de los dieléctricos. Posteriormente los condensadores se volverán a cargar debido a las corrientes de conductancia producidas en el aislante. Al cabo de un cierto tiempo se establecerá una corriente de conductancia, de intensidad:

$$I = \frac{E}{r_1 + r_2}$$

las tensiones en los condensadores serán:

$$U_1 = r_1 I \quad \text{y} \quad U_2 = r_2 I \quad (4-2 b)$$

(fig. 4-2, b) y las cargas q_1 y q_2 ya no serán iguales entre sí.

Por ejemplo, en los condensadores de papel, para capacidades $C_1 = 1 \mu F$, $C_2 = 2 \mu F$, y resistencias del aislante $r_1 \approx 500 M\Omega$,

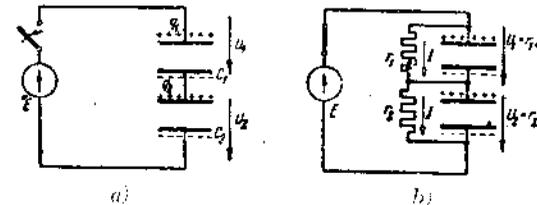


Fig. 4-2

$r_2 \approx 50 M\Omega$ y con una resistencia interna de la fuente de 5Ω , la tensión en las capacidades será igual, al cabo de $8,10^{-11}$ seg., al 95 % de los valores que se obtienen por la fórmula (4-2, a), y solo al cabo de 4 min., tendrá el 95 % de los dados por las (4-2, b).

4-2. Leyes fundamentales de los circuitos eléctricos con condensadores.

Entre las magnitudes que caracterizan a los circuitos eléctricos de corriente continua y los circuitos con condensadores, existe una analogía formal.

Si en un tramo de un circuito conductor, la intensidad es:

$$I = \frac{U}{r} = gU,$$

en un tramo de un circuito eléctrico con condensadores (fig. 4-1) será:

$$q = CU.$$

Comparando estas dos fórmulas, se puede establecer una analogía entre la carga q existente en los electrodos de un condensador y la intensidad I en la resistencia; entre la capacidad C y la conductancia

$$g = \frac{1}{r}.$$

Aprovechando esta analogía se pueden extender los métodos de cálculo de los circuitos eléctricos de corriente continua o los circuitos eléctricos que contienen condensadores.

En la figura 4-3 se muestra un esquema que contiene fuentes de f.e.m. y capacidades (condensadores de aislación ideal).

Para determinar las cargas y las tensiones en los condensadores se puede aplicar la ley de conservación de cantidad de electricidad y la segunda ley de Kirchhoff. La ley de conservación de la cantidad de electricidad es análoga a la primera ley de Kirchhoff para los circuitos eléctricos de corriente continua y se formula de la siguiente manera: La suma algebraica de las cargas existentes en los electrodos de los condensadores conectados a un nudo, es igual a la suma algebraica de las cargas que existían en dicho electrodos antes de su conexión:

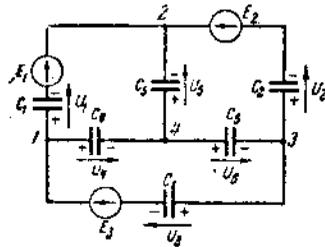


FIG. 4-3

Para ilustrar esta ecuación, destaquemos del esquema de la figura 4-3, el nudo 4 al cual están conectados tres condensadores de capacidad C_4 , C_5 y C_6 . Si antes de ser conectados en el circuito, existían en sus electrodos, las cargas $-q'_5$, $+q'_4$ y $+q'_6$ (fig. 4-4), después de su conexión habrá en los mismos electrodos, en general, cargas diferentes tanto en valor como en signo, por ejemplo $+q_5$, $-q_4$ y $+q_6$. Sin embargo la suma algebraica de esas cargas debe ser necesariamente igual a la suma de las cargas anteriores:

$$q_0 = +q_5 - q_4 + q_6 = -q'_5 + q'_4 + q'_6.$$

Esto se explica por el hecho de que en el proceso de descarga de los condensadores, las cargas iniciales de los electrodos, separados por un dieléctrico ideal, no pueden pasar del nudo considerado a otras partes del circuito; por la misma razón no habrá afluencia de cargas hacia el nudo dado desde el resto del circuito.

Si los condensadores no estuvieran cargados previamente, entonces, después de su conexión aparecerían cargas cuya suma algebraica en los electrodos considerados, contiguos al nudo 4, debería ser evidentemente igual a cero, es decir:

$$\Sigma q = 0.$$

La segunda ley de Kirchhoff, en su aplicación a un circuito eléctrico con condensadores, se formula de la siguiente manera: La suma algebraica de las f.e.m. existentes en la malla es igual a la suma algebraica de las tensiones de los condensadores pertenecientes a dicha malla, es decir:

$$\Sigma E = \Sigma q \frac{1}{C}. \quad (4-4)$$

Del mismo modo que en el cálculo de los circuitos eléctricos de corriente continua, es necesario convenir, al establecer las ecuaciones, el sentido positivo de las tensiones en los condensadores.

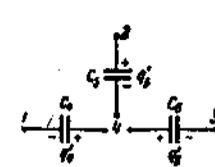


FIG. 4-4

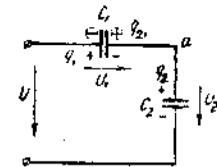


FIG. 4-5

En lo sucesivo, tomaremos el sentido positivo de las tensiones, desde el electrodo cargado positivamente hacia el negativo, y lo designaremos con una flecha (fig. 4-1). Es evidente que, tomando este sentido como positivo, la carga y la tensión estarán ligadas entre sí por la relación (4-1).

Problema 4-1. En la figura 4-5 se muestra el esquema de dos condensadores conectados en serie, de capacidad $C_1 = 20 \mu F$ y $C_2 = 40 \mu F$. La tensión $U = 110 V$.

El condensador de capacidad C_1 tenía una carga inicial $q_{01} = 800 \mu C$ los signos de esa carga figuran en el interior de unos círculos en la figura 4-5. Determinar las cargas y las tensiones U_1 y U_2 en los electrodos de los condensadores.

Solución. Demos a las tensiones U_1 y U_2 el sentido positivo indicado con flechas en el esquema.

De acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff, tenemos para el esquema de la figura 4-5:

$$U = U_1 + U_2 = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2}.$$

La carga inicial q_{01} no puede pasar de los electrodos, conectados con el punto a , a otra parte del circuito, aislada de ellos; por lo tanto para este punto será válida la ecuación análoga a la primera ley de Kirchhoff;

$$-q_1 + q_2 = q_{01}$$

Sustituyendo en las ecuaciones obtenidas los valores numéricos, tendremos:

$$0,05q_1 + 0,025q_2 = 110;$$

$$-q_1 + q_2 = 800.$$

La solución simultánea de esas ecuaciones nos da las cargas de los condensadores $q_1 = 1200 \mu C$ y $q_2 = 2000 \mu C$.

Las tensiones en los condensadores son evidentemente:

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{1200}{20} = 60 \text{ V};$$

y

$$U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{2000}{40} = 50 \text{ V}.$$

4-3. Cálculo de circuitos eléctricos ramificados que contienen condensadores.

Formemos las ecuaciones necesarias para determinar las cargas y las tensiones en todos los condensadores conectados en el esquema (fig. 4-3). Supongamos que se conozcan las f.e.m. E_1 , E_2 y E_3 , las capacidades C_1 , C_2 y C_3 , etc., de todos los condensadores C_5 , C_4 y C_6 , antes de su conexión en el circuito (fig. 4-4), no siendo cargados los condensadores restantes. Se pide determinar las cargas y las tensiones de los condensadores.

Para formar las ecuaciones, convengamos previamente en dar el sentido positivo a las tensiones en todos los condensadores (fig. 4-3), dado que la distribución de las cargas aun no se conoce, e indiquemos los signos de las cargas según la figura 4-1. Basándonos en la ley de conservación de la cantidad de electricidad tendremos en los nudos 1, 4 y 3:

$$\left. \begin{aligned} q_1 + q_4 - q_3 &= -q'_1; \\ q_5 - q_4 + q_6 &= q'_1 + q'_6 - q'_5; \\ q_2 - q_6 + q_3 &= -q'_6. \end{aligned} \right\} \quad (4-5)$$

Las ecuaciones restantes las obtendremos de la segunda ley de Kirchhoff:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= U_1 - U_5 - U_4 = q_1 \frac{1}{C_1} - q_5 \frac{1}{C_5} - q_4 \frac{1}{C_4}; \\ E_2 &= U_2 - U_5 + U_6 = q_2 \frac{1}{C_2} - q_5 \frac{1}{C_5} + q_6 \frac{1}{C_6}; \\ E_3 &= U_3 + U_1 + U_6 = q_3 \frac{1}{C_3} + q_4 \frac{1}{C_4} + q_6 \frac{1}{C_6}. \end{aligned} \right\} \quad (4-6)$$

De la solución simultánea de estas ecuaciones pueden resultar cargas con signo negativo, lo cual significará que los signos de las cargas de los condensadores correspondientes son contrarios a los indicados en el esquema.

Conociendo las cargas es fácil determinar, por la fórmula (4-1) las tensiones en los condensadores.

Para calcular circuitos eléctricos que contienen condensadores, se pueden aplicar los mismos métodos que para los circuitos eléctricos de corriente continua, basados en las leyes de Kirchhoff.

En la figura 4-6 se muestra un esquema ramificado con seis cargas desconocidas en los electrodos de los condensadores.

Supongamos que los condensadores no hayan tenido cargas antes de su conexión en el circuito. Para un sentido positivo de tensiones convenido y de acuerdo a la ley de conservación de carga y a la segunda ley de Kirchhoff, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -q_5 + q_1 + q_4 &= 0; \\ -q_1 + q_2 + q_6 &= 0; \\ -q_2 - q_3 + q_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-7)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= q_1 \frac{1}{C_1} + q_6 \frac{1}{C_6} - q_4 \frac{1}{C_4}; \\ E_2 &= q_3 \frac{1}{C_3} - q_2 \frac{1}{C_2} + q_6 \frac{1}{C_6}; \\ E_3 + E_5 &= q_5 \frac{1}{C_5} + q_4 \frac{1}{C_4} + q_3 \frac{1}{C_3}. \end{aligned} \right\} \quad (4-8)$$

Utilizando las ecuaciones (4-7), eliminemos las cargas q_3 , q_4 y q_5 de las ecuaciones (4-8); como resultado tendremos:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= q_1 \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_6} + \frac{1}{C_4} \right) - q_2 \frac{1}{C_2} - q_5 \frac{1}{C_4}; \\ -E_2 &= q_2 \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_6} \right) - q_1 \frac{1}{C_6} - q_5 \frac{1}{C_3}; \\ E_3 + E_5 &= q_5 \left(\frac{1}{C_5} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_3} \right) - q_1 \frac{1}{C_4} - q_2 \frac{1}{C_3}. \end{aligned} \right\} \quad (4-9)$$

En estas ecuaciones las cargas q_1 , q_2 y q_5 son algo así como cargas de mallas, análogas a las intensidades de malla de un circuito eléctrico de corriente continua de igual configuración.

Señalemos que si los condensadores estuvieran cargados antes de

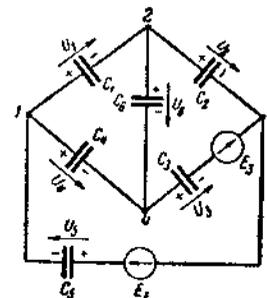


FIG. 4-6

ser incluidos en el circuito, la estructura general de las ecuaciones (4-9) permanecería siendo la misma, pero en sus primeros miembros se agregarían sumandos en forma de productos de las cargas iniciales por magnitudes inversas a las capacidades de los condensadores.

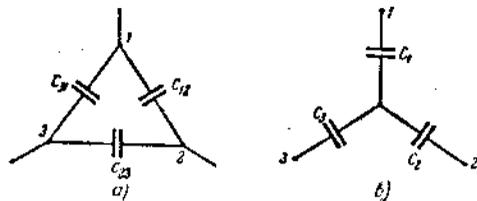


FIG. 4-7

De las ecuaciones (4-7) es fácil obtener las expresiones que establecen una relación entre los potenciales de los nudos, las f.e.m. y las capacidades. A tal efecto, admitamos que $\varphi_4 = 0$ y reemplacemos, en las ecuaciones (4-7), las cargas de los condensadores por las expresiones equivalentes dadas por las fórmulas (4-1):

$$\begin{aligned} q_1 &= (\varphi_1 - \varphi_2)C_1; \\ q_2 &= (\varphi_2 - \varphi_3)C_2; \\ q_3 &= (-\varphi_3 + E_3)C_3; \\ q_4 &= \varphi_1 C_4; \\ q_5 &= (\varphi_3 - \varphi_1 + E_5)C_5; \\ q_6 &= \varphi_2 C_6. \end{aligned}$$

Tendremos finalmente:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(C_1 + C_4 + C_5) - \varphi_2 C_1 - \varphi_3 C_5 &= E_5 C_5; \\ \varphi_2(C_2 + C_6 + C_1) - \varphi_1 C_1 - \varphi_3 C_2 &= 0; \\ \varphi_3(C_2 + C_3 + C_5) - \varphi_2 C_2 - \varphi_1 C_5 &= E_3 C_3 - E_5 C_5. \end{aligned} \right\} \quad (4-10)$$

Estas ecuaciones son análogas a las que se obtienen para un circuito eléctrico de corriente continua, de igual configuración, por el método de los nudos. En caso de existir cargas en los condensadores antes de su conexión, la estructura de las ecuaciones (4-10) seguirá siendo la misma pero se agregarán dichas cargas en los segundos miembros, del mismo modo que las intensidades de las fuentes de intensidad en un circuito eléctrico de igual configuración.

Si los condensadores conectados en triángulo (fig. 4-7, a) están descargados antes de su conexión en el circuito, pueden obtenerse, en virtud de las leyes de Kirchhoff, las fórmulas de transformación de un triángulo de capacidades en una estrella equivalente (fig. 4-7, b).

Se pueden obtener las mismas fórmulas sustituyendo en las expresiones

(2-7) las resistencias del triángulo por magnitudes inversas de las capacidades, es decir:

$$\frac{1}{C_1} = \frac{\frac{1}{C_{12}} \cdot \frac{1}{C_{31}}}{\frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_{31}}} = \frac{C_{23}}{C_{12}C_{31} + C_{23}C_{31} + C_{12}C_{23}};$$

de donde

$$C_1 = C_{12} + C_{31} + \frac{C_{12}C_{31}}{C_{23}}.$$

Para las otras dos capacidades de la estrella equivalente, tendremos:

$$C_2 = C_{23} + C_{12} + \frac{C_{23}C_{12}}{C_{31}};$$

$$C_3 = C_{31} + C_{23} + \frac{C_{31}C_{23}}{C_{12}}.$$

Análogamente podemos llegar a las fórmulas de transformación de una estrella de capacidades en un triángulo:

$$C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3};$$

$$C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3};$$

$$C_{31} = \frac{C_3 C_1}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Si el esquema eléctrico, además de capacidades, contiene resistencias por las que se cierran las corrientes, entonces, antes de determinar las cargas en las capacidades, habrá que hallar las tensiones en las

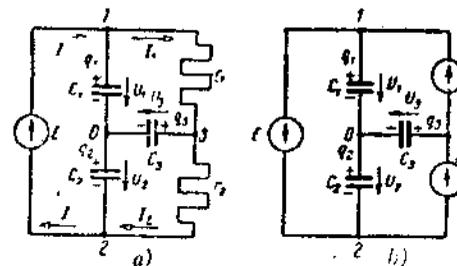


FIG. 4-8

resistencias por los métodos conocidos de cálculo de Iqs circuitos de corriente continua. Luego, según el teorema de compensación deberán sustituirse todas las resistencias por fuentes de f.e.m. Se obtendrá

finalmente el esquema de un circuito eléctrico con condensadores, cuyo cálculo puede efectuarse por uno de los métodos conocidos.

A título de ejemplo examinemos el esquema de la figura 4-8, a.

En dicho esquema la intensidad I en la fuente de f.e.m. y las intensidades I_1 e I_2 en las resistencias r_1 y r_2 son iguales entre sí y se determinan por la ley de Ohm.

$$I = I_1 = I_2 = \frac{E}{r_1 + r_2}.$$

Las tensiones en las resistencias r_1 y r_2 serán

$$U_{13} = r_1 I_1 \quad \text{y} \quad U_{32} = r_2 I_2.$$

De acuerdo al teorema de compensación, sustituyamos las resistencias r_1 y r_2 por las f.c.m. $E_{31} = U_{13}$ y $E_{23} = U_{32}$ (fig. 4-8, b) y escribamos las ecuaciones para este esquema:

$$-q_1 - q_3 + q_2 = 0;$$

$$E_{31} = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3};$$

$$E_{23} = \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_2}{C_2}.$$

La resolución de estas ecuaciones nos permite determinar las cargas buscadas q_1 , q_2 y q_3 .

4.4. Capacidades parciales.

En el estudio de los sistemas que contienen un gran número de conductores, por ejemplo, las líneas de transmisión, se suele recurrir al concepto de *capacidades parciales*. Las capacidades parciales permiten establecer las relaciones entre cargas y potenciales en el sistema de los conductores. Para aclarar este concepto examinemos un sistema formado por dos conductores aislados, cargados, 1 y 2 (fig. 4-9) de forma cualquiera, colocados en un medio homogéneo, próximos a un plano conductor, por ejemplo la tierra. Sean las cargas q_1 y q_2 de estos conductores, iguales en valor absoluto y de signo contrario, y sean φ_1 y φ_2 sus potenciales.

Una cierta parte q_{12} de la carga positiva del primer conductor, está como ligada directamente con la carga negativa q_{21} del segundo conductor, igual a la del primero; la carga restante del primero, q_{11} está ligada con la carga negativa del plano conductor. Por consiguiente la carga q_1 del primer conductor se puede representar como una suma de cargas q_{12} y q_{11} , es decir: $q_1 = q_{12} + q_{11}$. Análogamente se puede representar la carga q_2 como una suma de cargas q_{21} y q_{22} , es decir:

$$q_2 = q_{21} + q_{22}.$$

Dividiendo así las cargas se puede introducir el concepto de capa-

idades parciales (fig. 4-10) C_{12} , C_{11} y C_{22} , determinadas por las expresiones:

$$q_{12} = C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2);$$

$$q_{11} = C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0);$$

$$q_{22} = C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0);$$

$$q_{21} = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1),$$

donde φ_0 es el potencial del plano conductor.

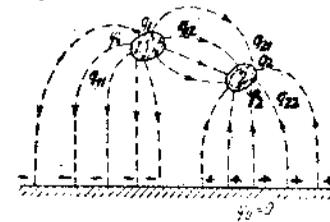


FIG. 4-9

Como la carga q_{12} es igual en valor absoluto a la q_{21} , y la carga q_{11} es igual a la carga q_{22} , las cargas q_{11} y q_{22} también serán iguales entre sí. Por consiguiente, la relación entre las cargas y los potenciales de los conductores puede representarse de la siguiente manera:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= q_{12} + q_{11} = C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0); \\ q_2 &= q_{21} + q_{22} = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (4-11)$$

En el caso de que $q_1 = -q_2$, se puede hablar de capacidad de los conductores 1 y 2 en presencia de un tercer electrodo y determinarla de las (4-11) por medio de las capacidades parciales:

$$C = \frac{q_1}{\varphi_1 - \varphi_2} = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}}. \quad (4-12)$$

Así, por ejemplo, si los conductores 1 y 2 son los hilos de una línea bifilar, la capacidad C se llama *capacidad de servicio de la línea*.

Un sistema de cuatro conductores aislados, de forma arbitraria, colocados en un medio homogéneo, se caracteriza por seis capacidades parciales: C_{12} , C_{23} , C_{31} , C_{11} , C_{22} y C_{33} (fig. 4-11).

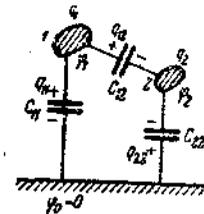


FIG. 4-10

Las cargas y los potenciales de estos conductores están vinculados entre sí por ecuaciones similares a las (4-11).

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{11}(\varphi_1 - \varphi_0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{13}(\varphi_1 - \varphi_3); \\ q_2 &= C_{22}(\varphi_2 - \varphi_0) + C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{23}(\varphi_2 - \varphi_3); \\ q_3 &= C_{33}(\varphi_3 - \varphi_0) + C_{31}(\varphi_3 - \varphi_1) + C_{32}(\varphi_3 - \varphi_2). \end{aligned} \right\} (4-13)$$

Si se toma igual a cero el potencial φ_0 del cuarto conductor, se deducirá de las ecuaciones (4-13) que la capacidad parcial afectada de dos subíndices iguales, por ejemplo la C_{11} , representa la relación entre la carga del conductor correspondiente y su potencial, estando todos los conductores unidos entre sí y teniendo potenciales iguales al de dicho conductor, es decir para $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$:

$$C_{11} = \frac{q_1}{\varphi_1}.$$

La capacidad parcial afectada de dos subíndices distintos, por ejemplo la C_{12} representa la relación entre la carga del primer conductor y el potencial del segundo, estando todos los conductores, excepto el segundo, unidos entre sí y cada uno de ellos con el cuarto conductor cuyo potencial es igual a cero, es decir:

$$C_{12} = \frac{-q_1}{\varphi_2}.$$

Dado que para un potencial positivo φ_2 , la carga q tiene signo negativo, la capacidad parcial C_{12} siempre será positiva.

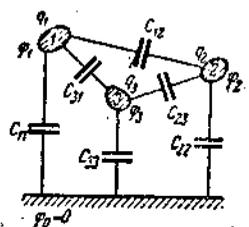


FIG. 4-11

Por lo tanto, en las ecuaciones (4-13) todas las capacidades parciales y, en particular $C_{12} = C_{21}$, $C_{13} = C_{31}$ y $C_{23} = C_{32}$, son positivas, igual que en las ecuaciones (4-11), y se determinan por las dimensiones geométricas y la posición mutua de los conductores como también por la constante dieléctrica* del medio.

De las ecuaciones (4-13), y suponiendo $\varphi_0 = 0$, obtenemos, mediante algunas transformaciones sencillas:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \varphi_1(C_{11} + C_{12} + C_{13}) - C_{12}\varphi_2 - C_{13}\varphi_3; \\ q_2 &= \varphi_2(C_{22} + C_{21} + C_{23}) - C_{21}\varphi_1 - C_{23}\varphi_3; \\ q_3 &= \varphi_3(C_{33} + C_{31} + C_{32}) - C_{31}\varphi_1 - C_{32}\varphi_2. \end{aligned} \right\} (4-14)$$

* En el original ruso "permeabilidad" dieléctrica (N. T.).

CAPÍTULO V

CIRCUITOS ELECTRICOS NO LINEALES

5-1. Elementos y esquemas equivalentes de los circuitos no lineales más simples.

En los capítulos anteriores se han expuesto los métodos fundamentales de cálculo y se han descrito las propiedades de los circuitos eléctricos lineales. Examinemos ahora los circuitos eléctricos que contienen elementos cuyas características de Volt-Ampere no son lineales.

Los elementos no lineales que se encuentran en los circuitos eléctricos pueden clasificarse según sus curvas características en dos grupos fundamentales: simétricos y asimétricos. Se llaman simétricos aquellos cuya características de Volt-Ampere no dependen de los sentidos de las corrientes que los atraviesan ni de la tensión existente en sus bornes. Tales son las lámparas eléctricas, las válvulas reguladores de corriente ("barreters"), las termorresistencias (termistores), etc. Los asimétricos son aquellos cuyas características de Volt-Ampere son distintas para distintos sentidos de la corriente y de la tensión en sus bornes. Como ejemplo de elementos no lineales de este tipo podemos mencionar el arco eléctrico de electrodos heterogéneos (cobre-carbón, hierro-mercurio), los tubos electrónicos de dos y de tres electrodos, las válvulas, etc.

Examinemos algunas curvas características de Volt-Ampere. La curva de un "barreter" utilizado para estabilizar la corriente, muestra que al variar entre ciertos límites la tensión en sus bornes, la intensidad en el estabilizador permanece prácticamente invariable.

En la figura 5-1 se muestra la curva característica típica de un "barreter". La zona de intensidad constante está comprendida entre una cierta tensión U_p y una tensión U_f . La resistencia crece con la intensidad de la corriente.

Para estabilizar la tensión en los circuitos eléctricos se suele conectar en ellos los termistores cuya resistencia disminuye al aumentar la temperatura. En la figura 5-2 se muestra una curva característica típica de una termorresistencia de este tipo. Se las usa en los distintos circuitos para medir y regular las temperaturas, en calidad de relé de tiempo, con fines de compensación termométrica, etc.

Las lámparas de efluvios son elementos no lineales que forman parte de numerosos circuitos eléctricos. En la figura 5-3 se muestra una curva característica de Volt-Ampere de un espacio gaseoso, donde están marcadas las distintas zonas de trabajo. En un régimen de descarga normal, ese tipo de lámpara puede utilizarse ventajosamente como estabilizador de tensión, dado que para una variación considerable de la intensidad, la tensión en los bornes de la lámpara no se modifica prác-

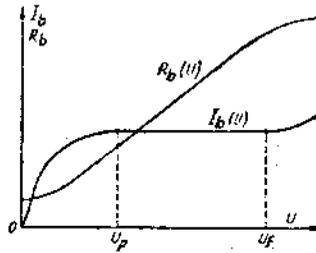


FIG. 5-1

ticamente. El régimen de servicio de un espacio gaseoso caracterizado por una descarga de arco, también se presenta con bastante frecuencia en la práctica. Al aumentar la intensidad, la tensión en el arco baja, o sea el arco tiene una característica descendente*.



FIG. 5-2

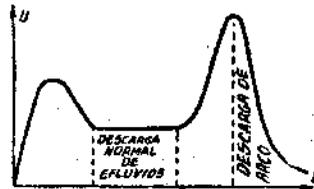


FIG. 5-3

* Anteriormente hemos señalado que el fenómeno del arco fué descubierto por primera vez por V. V. Petrov en 1802, quien señaló la posibilidad de llevar a la práctica este descubrimiento para fundir y soldar los metales.

Rusia fué también la cuna de la soldadura por arco de los metales. La soldadura eléctrica fué propuesta por N. N. Benardos en 1882. Benardos colocaba los objetos metálicos en un "yunque" conectado con uno de los polos de la fuente de energía eléctrica; el otro polo estaba conectado con un electrodo de carbón, fijado en un soporte aislado. Bajo la acción del arco eléctrico el metal se fundía, soldándose luego. N. G. Slavianov fué el primero en utilizar, en lugar del electrodo de carbón, un electrodo del mismo metal que las piezas a soldarse (1888-1890). Este método se implantó no sólo para reparar las distintas piezas de las máquinas y corregir las piezas fundidas defectuosas, sino también para ejecutar estructuras metálicas.

Las lámparas electrónicas, muy difundidas en la electrotecnia moderna, tienen también curvas características de Volt-Ampere no lineales. En la figura 5-4 se da la intensidad de corriente en el ánodo de un triodo, en función de la tensión en el ánodo, para distintos valores de la tensión de grilla.

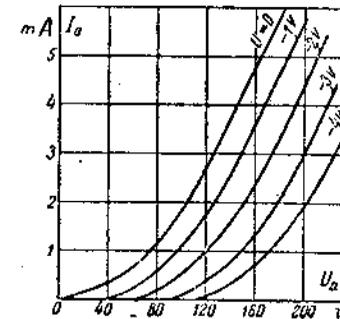


FIG. 5-4

El cálculo y el estudio de los circuitos eléctricos de características no lineales, por regla general, se realizan por métodos grafo-analíticos basados en las leyes de Kirchhoff. El cálculo puede efectuarse analíticamente cuando las curvas características pueden ser representadas con suficiente exactitud por funciones analíticas.

Para el cálculo de los circuitos no lineales se introduce el concepto de resistencias estáticas y dinámicas de elemento no lineal.

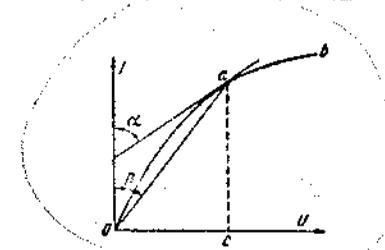


FIG. 5-5

Supongamos que la curva característica de Volt-Ampere, del elemento no lineal tenga la forma *oab* de la figura 5-5, en escala m_i para la intensidad y m_u para la tensión, y que el punto *a*, caracterice el régimen de trabajo del elemento. La relación entre la tensión, dada por el segmento *oc* y la intensidad, representada por *ca*, determina, en cierta escala $m_r = \frac{m_u}{m_i}$; una magnitud llamada resistencia estática r_s en el punto dado. En la figura 5-5 se ve que la magnitud de esa resistencia es pro-

porcional a la tangente del ángulo β comprendido entre la recta que une el punto a con el origen de las coordenadas y el eje de las intensidades, es decir:

$$r = \frac{U}{I} = \frac{m_c oc}{m_c ca} = m_c \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

La relación entre el incremento de la tensión y el incremento de la intensidad i , en el límite, la derivada de la tensión respecto a la intensidad en la misma escala m_r , nos da la *resistencia dinámica* r_d ; esta resistencia es proporcional a la tangente del ángulo α formado por la tangente geométrica de la curva en el punto a y el eje de las intensidades, o sea:

$$r_d = \frac{dU}{dI} = m_r \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Para un tramo recto de la curva característica, la resistencia dinámica puede expresarse por la relación entre el incremento finito de la tensión y el incremento finito de la intensidad:

$$r_d = \frac{\Delta U}{\Delta I}$$

Para los elementos no lineales con curva característica descendente, la resistencia dinámica es negativa, dado que el incremento positivo de

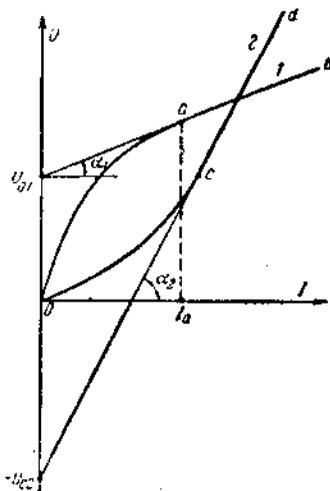


FIG. 5-6

la intensidad es acompañado por un incremento negativo de la tensión.

Si la curva característica se aproxima en alguno de sus tramos a la línea recta, podemos servirnos para el cálculo de un esquema equi-

valente en el cual el elemento no lineal esté representado en forma de una fuente de tensión y de una resistencia lineal r_d . Así por ejemplo, las curvas de dos elementos no lineales, representadas en la figura 5-6, pueden ser reemplazadas en los tramos ab y cd por líneas rectas, cuyas ecuaciones serán:

$$U_1 = U_{01} + m_r \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot I;$$

$$U_2 = -U_{02} + m_r \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot I,$$

o también

$$U_1 = U_{01} + r_{d1} I; \quad U_2 = -U_{02} + r_{d2} I. \quad (5-1)$$

Utilizando estas ecuaciones será fácil reemplazar los elementos no lineales por sus esquemas equivalentes. Examinemos el esquema de un circuito simple con un elemento no lineal conectado en serie $r_1(I)$,

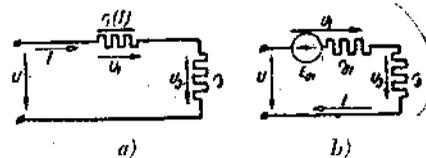


FIG. 5-7

cuya curva característica es del tipo 1 y una resistencia lineal r_3 (fig. 5-7, a). La curva característica del elemento no lineal, se determina, para $I \approx I_0$, por la ecuación

$$U_1 = U_{01} + r_{d1} I.$$

Para el esquema de la figura 5-7, a

$$U = U_1 + U_3 = U_{01} + r_{d1} I + U_3$$

y por consiguiente se puede sustituir el elemento no lineal por una fuente de f.e.m. $E_{01} = U_{01}$ y por una resistencia r_{d1} como lo muestra la figura 5-7, b.

Si un sector de la curva está definido por la ecuación

$$U_2 = -U_{02} + r_{d2} I,$$

entonces, en el esquema equivalente de la figura 5-7, b, la fuente de f.e.m. debe tener la polaridad contraria.

Todas las relaciones que se pueden establecer, aprovechando los esquemas equivalentes, son ciertas solamente para aquellos regímenes en que todos los elementos no lineales del circuito eléctrico trabajan sobre tramos rectos de las curvas características.

5-2. Método gráfico de cálculo de los circuitos no ramificados, con elementos no lineales.

En la figura 5-8, se muestran dos elementos no lineales conectados en serie $r_1(I_1)$ y $r_2(I_2)$, cuyas curvas características $I_1(U_1)$ e $I_2(U_2)$ están dadas (fig. 5-9). Sea U la tensión en los bornes del circuito; se pide determinar la intensidad I y las tensiones U_1 y U_2 en los elementos.

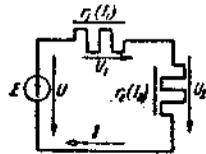


FIG. 5-8

Para calcular la intensidad I y las tensiones U_1 y U_2 construyamos la curva característica auxiliar que represente la intensidad I en función de U_1 y U_2 . Como en un circuito no ramificado, la intensidad en ambos elementos no lineales tiene el mismo valor $I_1 = I_2 = I$, para construir la curva característica $I(U_1 + U_2)$, sumemos las tensiones U_1 y U_2 para los mismos valores de la intensidad I (fig. 5-9). Si llevamos ahora sobre el eje de las abscisas el segmento oa igual, en la escala m_u , a la tensión U , y si desde el punto a trazamos la paralela ab al eje de las ordenadas, hasta su intersección con la curva $I(U_1 + U_2)$, obtendremos el segmento ab igual, en escala m_i , a la intensidad I . Luego, desde el punto b tracemos la bc paralela al eje de las abscisas. Obtendremos los segmentos cd y cf iguales respectivamente a U_1 y U_2 , en escala m_u .

La misma construcción debe hacerse para calcular la intensidad y las tensiones si uno de los elementos tiene una curva característica lineal.

Análogamente se resuelve el cálculo de un circuito que consta de tres o más elementos no lineales conectados en serie.

El gráfico para el cálculo de un circuito en serie puede construirse de otro modo (fig. 5-8). Representemos el esquema de la figura 5-8 en forma de una conexión en serie de un dipolo activo con fuente de

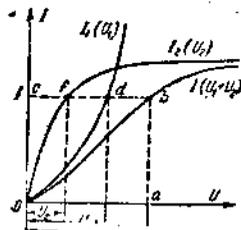


FIG. 5-9

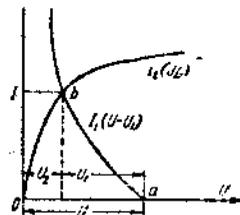


FIG. 5-10

f.e.m. $E = U$ y resistencia no lineal $r_1(I_1)$ y de un dipolo pasivo $r_2(I_2)$. La tensión U_2 en los bornes del elemento no lineal $r_2(I_2)$ se determina, por una parte, con la curva característica de dicho elemento $I_2(U_2)$, y por otra, con la diferencia entre la f.e.m. $E = U$ y la tensión U_1 en los bornes del elemento no lineal $r_1(I_1)$.

En la figura 5-10 se dan las curvas características $I_2(U_2)$ e $I_2(U - U_1)$, cuyas abscisas se han obtenido restando las abscisas de las curvas dada $I_1(U_1)$ de la tensión U para los correspondientes valores de la intensidad I_1 . De la figura 5-10 se desprende que en el punto b de intersección de las curvas $I_2(U_2)$ e $I_1(U - U_1)$ se satisfacen las igualdades $U_2 = U - U_1$ e $I_1 = I_2 = I$ que determinan el régimen del circuito estudiado.

5-3. Cálculo gráfico de los circuitos que contienen elementos no lineales conectados en paralelo.

En la figura 5-11 se muestran los elementos no lineales $r_1(I_1)$ y $r_2(I_2)$ conectados en paralelo, cuyas curvas características $I_1(U_1)$ e $I_2(U_2)$ están dadas (fig. 5-12). Sea la tensión en los bornes del circuito igual a U ; de las curvas $I_1(U_1)$ e $I_2(U_2)$ hallamos fácilmente las intensidades I_1 e I_2 en los elementos no lineales y, de la ecuación $I_1 + I_2 = I$, la intensidad en la parte no ramificada del circuito.

Si la intensidad I está dada, para determinar la tensión U en los elementos no lineales $r_1(I_1)$ y $r_2(I_2)$ construiremos una curva auxiliar $(I_1 + I_2)U$, que exprese la intensidad total en función de la tensión U . Dado que en una conexión en paralelo $U_1 = U_2 = U$, para construir dicha curva es necesario de acuerdo a la ecuación $I = I_1 + I_2$, sumar las ordenadas de las curvas $I_1(U_1)$ e $I_2(U_2)$ para los mismos valores de la tensión $U_1 = U_2$ (fig. 5-12). Llevando sobre el eje de las ordenadas el segmento oc que representa a la intensidad I en escala m_i , y trazando por el punto c la cb paralela al eje de las abscisas, hasta su intersección con la curva característica $(I_1 + I_2)U$, obtendremos el segmento $cb = oa$, igual a la tensión U en escala m_u . Luego por el punto b tracemos una paralela al eje de

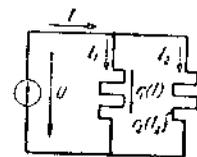


FIG. 5-11

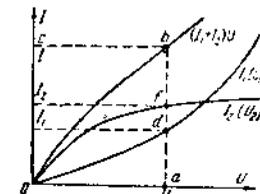


FIG. 5-12

las ordenadas hasta su intersección con el eje de las abscisas. Los segmentos ad y af nos darán, en escala m_i , las intensidades I_1 e I_2 .

Del mismo se puede calcular un circuito eléctrico con un número cualquiera de elementos no lineales conectados en paralelo.

5.4. Método gráfico de cálculo para los circuitos que contienen elementos pasivos lineales y no lineales, en conexión mixta.

Examinemos un esquema con una conexión mixta de elementos lineales y no lineales (fig. 5-13). Sean dadas, la tensión de la fuente U , las curvas características de los elementos no lineales $I_1(U_1)$, $I_2(U_2)$, (fig. 5-14) y la resistencia r_3 del elemento lineal; se quieren conocer las intensidades en todas las ramas y las tensiones en los elementos.

Para determinar las intensidades y tensiones buscadas, apliquemos el método gráfico como en el caso de los circuitos en serie y en paralelo.

De acuerdo a la resistencia dada r_3 construyamos (fig. 5-14) la curva característica para el elemento lineal, la recta $I_3(U_3)$, que pasa por el origen de las coordenadas. Sumando las ordenadas de la curva

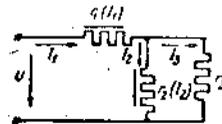


FIG. 5-13

$I_2(U_2)$ y de la recta $I_3(U_3)$, para los mismos valores de la tensión $U_2 = U_3 = U_{23}$, construyamos en la figura 5-14 la curva característica de la conexión en paralelo $(I_2 + I_3)U_{23}$. Luego, sumando las abscisas de las curvas $I_1(U_1)$ e $(I_2 + I_3)U_{23}$, para los mismos valores de la intensidad $I_1 = I_2 + I_3$ obtendremos la curva característica de todo el circuito

$$I_1(U_1 + U_{23}) = I_1(U).$$

Llevemos sobre el eje de las abscisas, la tensión U , representada por el segmento oa en escala m_U , y tracemos una paralela al eje de

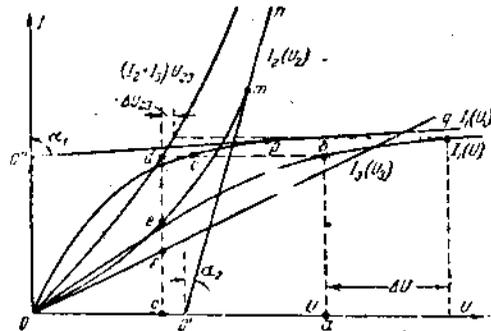


FIG. 5-14

las ordenadas hasta su intersección con la curva $I_1(U)$; la ordenada ab nos da en escala m_I la intensidad I_1 . Luego por el punto b , tracemos una paralela al eje de las abscisas hasta su intersección con las curvas $I_1(U_1)$ e $(I_2 + I_3)U_{23}$ y bajemos desde el punto d una perpendicular al eje de las abscisas. De acuerdo a las ecuaciones $U = U_1 + U_{23}$ e $I_1 = I_2 + I_3$, es evidente que los segmentos db y cb representan en escala m_U la tensión U_1 en el primer elemento y la tensión U_{23} en la derivación respectivamente, y los segmentos ge y gf , dan, en escala m_I las intensidades I_2 e I_3 .

La construcción gráfica para el circuito examinado puede efectuarse por otro procedimiento, igual que para el cálculo del esquema con elementos no lineales conectados en serie (fig. 5-10).

Con ese objeto conviene representar el esquema de la figura 5-13 como una conexión en serie de un dipolo activo no lineal con fuente de f.e.m. $E = U$ y resistencia no lineal $r_1(I_1)$, y un dipolo pasivo no lineal con resistencia $r_{23}(I_2 + I_3)$, equivalente a dos ramas $r_2(I_2)$ y $r_3(I_3)$ puestas en paralelo (fig. 5-15).

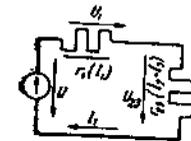


FIG. 5-15

El esquema obtenido (fig. 5-15), no se diferencia en nada del de la figura 5-8; vemos pues que el cálculo del régimen para el circuito de la figura 5-15 puede efectuarse con una construcción gráfica análoga a la de la figura 5-10.

5.5. Ejemplos de estudio del régimen de los circuitos no lineales por el método analítico.

El circuito eléctrico (fig. 5-13) puede aplicarse para estabilizar la tensión $U_2 = U_3 = U_{23}$ en la resistencia r_3 del receptor. En efecto, si la tensión U , a partir de un cierto valor, y dentro de amplios límites varía en una cantidad ΔU , la tensión U_{23} en la resistencia r_3 variará en una cantidad ΔU_{23} mucho menor (fig. 5-14).

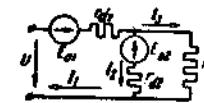


FIG. 5-16

El grado de constancia de la tensión en la resistencia de carga se caracteriza por el coeficiente de estabilización. El coeficiente de

estabilización de la tensión es la razón entre la variación relativa de la tensión U y la variación relativa de la tensión estabilizada U_{23} , es decir:

$$k_{est.} = \frac{\Delta U}{U} : \frac{\Delta U_{23}}{U_{23}} = \frac{U_{23}}{U} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta U_{23}}$$

o en el límite

$$k_{est.} = \frac{U_{23}}{U} \cdot \frac{dU}{dU_{23}} \quad (5-2)$$

Evidentemente cuanto mayor sea el coeficiente de estabilización, tanto menor será la variación relativa de la tensión estabilizada.

Determinemos analíticamente el coeficiente de estabilización de la tensión en la figura 5-13.

Reemplacemos los sectores mn y pq de las curvas características $I_2(U_2)$ e $I_1(U_1)$, por las rectas no' y qo'' . Las ecuaciones de las rectas serán:

$$U_2 = U_{02} + r_{d2}I_2;$$

$$U_1 = -U_{01} + r_{d1}I_1,$$

donde r_{d1} y r_{d2} son las resistencias dinámicas de los elementos no lineales.

El esquema equivalente de la figura 5-16 satisface a estas ecuaciones, si $E_{01} = U_{01}$ y $E_{02} = U_{02}$.

Aplicando la primera y la segunda ley de Kirchhoff escribamos las ecuaciones:

$$U + E_{01} = r_{d1}I_1 + U_2;$$

$$E_{02} = U_2 - r_{d2}I_2;$$

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

su solución simultánea nos dará:

$$U = U_{23} \frac{r_{d1}r_{d2} + r_{d1}r_3 + r_{d2}r_3}{r_{d2}r_3} - \frac{E_{01}r_{d2} + E_{02}r_{d1}}{r_{d2}}$$

Hallemos la derivada de la tensión U respecto a U_{23}

$$\frac{dU}{dU_{23}} = \frac{r_{d1}r_{d2} + r_{d1}r_3 + r_{d2}r_3}{r_{d2}r_3}$$

Sustituyendo $\frac{dU}{dU_{23}}$ en la expresión dada para $k_{est.}$ obtenemos:

$$k_{est.} = \frac{U_{23}}{U} \left(1 + \frac{r_{d1}}{r_{d2}} + \frac{r_{d1}}{r_3} \right).$$

Para lograr una buena estabilización de la tensión U_{23} , el coeficiente $k_{est.}$ debe tener el máximo valor posible. En el esquema consi-

derado, esto se obtiene utilizando elementos no lineales con resistencias estáticas decrecientes $r_2(I_2)$ y crecientes $r_1(I_1)$. Las resistencias dinámicas r_{d1} y r_{d2} son proporcionales a $\text{tg } \alpha_1$ y $\text{tg } \alpha_2$ respectivamente (fig. 5-14). Dado que $\text{tg } \alpha_1 \gg \text{tg } \alpha_2$ la relación $\frac{r_{d1}}{r_{d2}} \gg 1$. De modo que, para determinadas relaciones entre las resistencias r_{d1} , r_{d2} y r_3 , se puede obtener un valor de $k_{est.}$ que sobrepase varias veces a la unidad.

Para estabilizar una tensión se pueden aprovechar otros circuitos y en particular un circuito de puente, que se muestra en la figura 5-17. Supongamos que

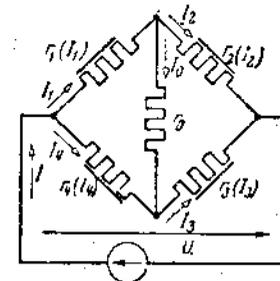


FIG. 5-17

en este esquema y en un régimen dado, se pueden reemplazar las curvas características de los elementos no lineales $r_1(I_1) = r_3(I_3)$ y $r_2(I_2) = r_4(I_4)$ por rectas cuyas ecuaciones sean:

$$U_1 = -E_{01} + r_{d1}I_1;$$

$$U_2 = E_{02} + r_{d2}I_2.$$

En la figura 5-18 se muestra el esquema equivalente en el cual los elementos no lineales fueron reemplazados por fuentes de f.e.m. y por resistencias dinámicas. Como el esquema es simétrico será $I_1 = I_3$ e $I_2 = I_4$.

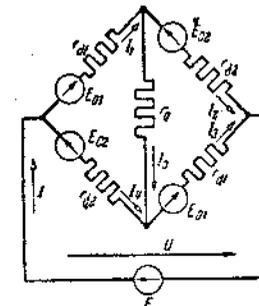


FIG. 5-18

Para determinar las cuatro intensidades desconocidas, establezcamos las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} E + E_{01} - E_{02} &= r_{d1}I_1 + r_{d2}I_2; \\ E_{01} + E_{02} &= r_{d1}I_1 + r_0I_0 - r_{d2}I_2; \\ I_1 &= I_0 + I_2; \\ I &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Sea $r_{d1} = r_{d2} = r_d$, lo cual no es difícil de obtener en las condiciones reales. Entonces, la resolución simultánea de las ecuaciones nos dará:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{E_{01} + E_{02}}{r_d + r_0}; \\ I_1 &= \frac{E + E_{01} - E_{02}}{2r_d} + \frac{E_{01} + E_{02}}{2(r_d + r_0)}; \\ I_2 &= \frac{E + E_{01} - E_{02}}{2r_d} - \frac{E_{01} + E_{02}}{2(r_d + r_0)}; \\ I &= \frac{E + E_{01} - E_{02}}{r_d}. \end{aligned}$$

De la primera expresión se deduce que tanto I_0 como la tensión $U_0 = r_0I_0$, no dependen de la tensión aplicada U . Por consiguiente este circuito puede servir como estabilizador de la tensión y de la intensidad.

5.6. Cálculo de circuitos ramificados que contienen elementos no lineales.

Examinemos un ejemplo de cálculo de circuito ramificado (fig. 5-19) con tres f.e.m. conocidas E_1, E_2 y E_3 y tres elementos no lineales: $r_1(I_1), r_2(I_2)$ y $r_3(I_3)$ que, con el objeto de simplificar las construcciones gráficas posteriores, consideremos simétricos e iguales. Las curvas

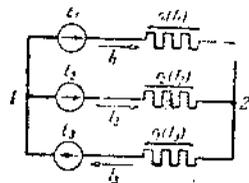


FIG. 5-19

características de los elementos no lineales $r_2(U_2)$ (fig. 5-12) están dadas; se desean determinar las intensidades I_1, I_2 e I_3 en todas las ramas.

Nos proponemos el sentido positivo de las intensidades I_1, I_2 e I_3 .

De acuerdo a la segunda ley de Kirchoff, la diferencia de potenciales entre los puntos 2 y 1 se determinará por las expresiones

$$\varphi_2 - \varphi_1 = U_{21} = E_1 - U_1 = E_2 - U_2 = -E_3 + U_3, \quad (5-3)$$

donde U_1, U_2 y U_3 son las tensiones de los elementos no lineales.

Utilizando la curva característica de Volt-Ampere $I_2(U_2)$ (fig. 5-12) construimos las curvas (fig. 5-20): $I_1(U_{21}) = I_1(E_1 - U_1)$; $I_2(U_{21}) = I_2(E_2 - U_2)$; $I_3(U_{21}) = I_3(-E_3 + U_3)$.

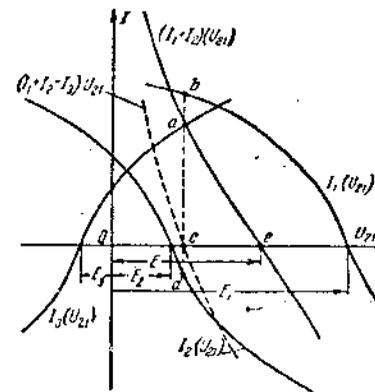


FIG. 5-20

Para determinar las intensidades en las ramas trazamos la curva auxiliar $(I_1 + I_2)U_{21}$ que se obtiene sumando las ordenadas de las curvas $I_1(U_{21})$ e $I_2(U_{21})$ para los mismos valores de la tensión U_{21} .

Las intensidades de las ramas deben satisfacer a las ecuaciones (5-3) y a la primera ley de Kirchoff $I_1 + I_2 = I_3$. Por consiguiente la ordenada del punto a de intersección entre la curva $I_3(U_{21})$ y la curva $(I_1 + I_2)U_{21}$, nos da, en escala m_I , la intensidad buscada I_3 , y la abscisa del mismo punto a nos da, en escala m_U , la tensión U_{21} . Trazando por el punto a una paralela al eje de las ordenadas, hasta interceptar las curvas $I_1(U_{21})$ e $I_2(U_{21})$, obtendremos los segmentos cb y cd que determinan, en la misma escala m_I , las intensidades I_1 e I_2 .

Señalemos que el sentido positivo, elegido para la corriente de intensidad I_3 , no coincide con el sentido real de esa corriente (el punto d se encuentra debajo del eje de las abscisas).

Otra forma de solucionar el problema sería construyendo la curva $(I_1 + I_2 - I_3)U_{21}$ en lugar de la $(I_1 + I_2)U_{21}$ (curva de puntos en la fig. 5-20).

Ya que de acuerdo a la primera ley de Kirchoff, la suma de las intensidades $I_1 + I_2 - I_3$ es igual a cero, el punto c de la intersección de la curva $(I_1 + I_2 - I_3)U_{21}$, con el eje de las abscisas nos dará la solución del problema.

El método de cálculo expuesto se puede extender a circuitos más

complejos, que constan de cualquier número de elementos no lineales pasivos y activos agrupados en conexión mixta. Para fundamentar lo dicho examinemos nuevamente el esquema de la figura 5-19 y demostraremos que el gráfico de la figura 5-20 corresponde al cálculo de un esquema equivalente (fig. 5-21) formado por dos dipolos no lineales activos conectados en serie. En dicho esquema, uno de los dipolos, el que contiene la f.e.m. E y el elemento no lineal $r_{eq}(I_1 + I_2)$, es equivalente a las dos ramas paralelas dadas que contienen las f.e.m. E_1 y E_2 y los elementos no lineales $r_1(I_1)$ y $r_2(I_2)$.

En efecto, al sumar las ordenadas de las curvas $I_1(U_{21})$ e $I_2(U_{21})$ para los mismos valores de la tensión U_{21} (fig. 5-20) se establece la relación $(I_1 + I_2)U_{21}$ entre la corriente total $(I_1 + I_2)$ y la tensión U_{21} existente en los bornes de las ramas paralelas mencionadas. Si se eligen la f.e.m. E y la característica de Volt-Ampere $(I_1 + I_2)U_{eq}$ del elemento no lineal $r_{eq}(I_1 + I_2)$ de tal modo que la relación entre la intensidad $(I_1 + I_2)$ y la tensión U_{21} sea la misma para este esquema que para el de la figura 5-19, el dipolo obtenido será equivalente a las dos ramas paralelas que contienen las f.e.m. E_1 y E_2 y los elementos no lineales $r_1(I_1)$ y $r_2(I_2)$.

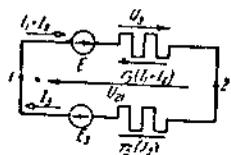


FIG. 5-21

La fuerza electromotriz E del dipolo activo equivalente se determina por la tensión existente en sus bornes para una corriente de intensidad $I_1 + I_2 = 0$, que corresponde al punto e en la figura 5-20. Por lo tanto, dicha f.e.m. es igual, en escala m_e , al segmento oe (fig. 5-20). La curva característica $(I_1 + I_2)U_{eq}$ para el elemento no lineal equivalente $r_{eq}(I_1 + I_2)$ puede hallarse de acuerdo a la ecuación $U_{eq} = E - U_2$ restando de la f.e.m. E las abscisas de la curva característica $(I_1 + I_2)U_{21}$. Luego, para determinar la intensidad I_3 en el esquema de la figura 5-21, se puede usar el segundo método de cálculo aplicado a un circuito en serie (fig. 5-10), expuesto anteriormente (5-2) y que coincide enteramente con los gráficos de la figura 5-20.

Como ya se señaló, el método de cálculo explicado puede exten-

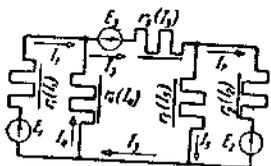


FIG. 5-22

derse a circuitos más complejos con conexiones mixtas de elementos no lineales. En dichos circuitos conviene reemplazar las ramas conectadas en paralelo por dipolos equivalentes, y luego transformar todo el esquema en una simple conexión de dipolos en serie. Por ejemplo,

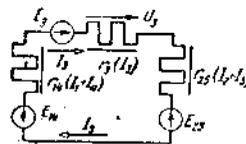


FIG. 5-23

para calcular el circuito representado en la figura 5-22 se puede sustituir la primera y la cuarta ramas como también, la segunda y la quinta, por dipolos equivalentes obteniendo como resultado de la sustitución, un circuito no ramificado formado por tres dipolos activos (fig. 5-23) cuyo cálculo no presenta dificultades. Luego puede volverse al esquema inicial y de acuerdo a las leyes de Kirchhoff determinar las corrientes en las ramas restantes.

A los efectos del cálculo de circuitos que contienen elementos lineales y no lineales puede a veces simplificarse el esquema, aplicando a los conjuntos de los elementos lineales, las fórmulas de transformación mutua del triángulo y de la estrella de resistencias. Por ejemplo, el esquema de la figura 5-24 contiene una estrella de resistencias constantes r_4 , r_5 y r_6 . Una vez transformada la estrella en triángulo, se obtiene el esquema de la figura 5-25 con una conexión mixta de elementos lineales y no lineales, cuyo cálculo puede efectuarse gráficamente sin mayores dificultades.

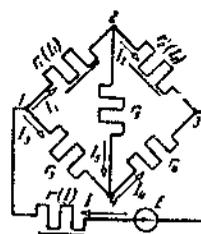


FIG. 5-24

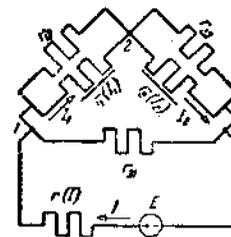


FIG. 5-25

El cálculo de algunos circuitos bastante complejos que contienen elementos no lineales, puede a veces reducirse al de circuitos formados por un agrupamiento mixto de dipolos no lineales activos y pasivos.

En la figura 5-26 se representa un esquema que contiene elementos en las seis ramas. Sean conocidas las f.e.m. y las curvas características para todos los elementos no lineales; se quiere determinar las intensidades en las ramas. Basándonos en el teorema de compensación sustituyamos la tensión $U(I) = r(I) \cdot I$ por la

f.e.m. $E(I)$ (fig. 5-27, a). Luego conectémos en cada una de las ramas unidas con el punto 4, una f.e.m. igual a $E'(I) = E - E(I)$, de tal modo que la diferencia de potenciales entre los puntos 4 y 2 se haga igual a cero como sucede precisamente en la figura 5-27, b. Las intensidades en todas las ramas no se modificarán dado que la suma de las f.e.m. en cualquiera de las mallas sigue siendo igual a la precedente.

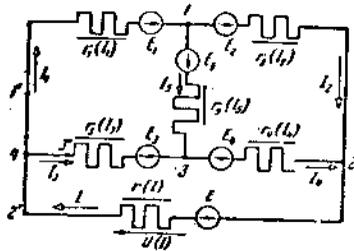


Fig. 5-26

Como resultado de esta transformación tenemos el esquema de un agrupamiento mixto de dipolos activos no lineales.

Si $I(U)$ (fig. 5-28) es la curva característica de Volt-Amper de un elemento no lineal $r(I)$ (fig. 5-28), entonces, de acuerdo a la ecuación

$$E'(I) = E - E(I) = E - U(I)$$

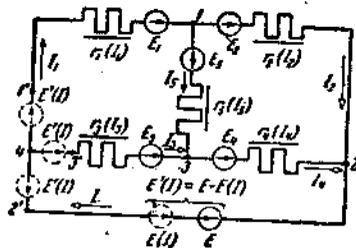


Fig. 5-27 a

la curva característica exterior para el dipolo activo de f.e.m. E y elemento no lineal $r(I)$, estará representada por la $I(E')$. Para determinar la intensidad I , nos

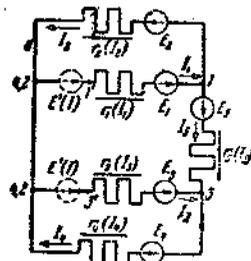


Fig. 5-27 b

proponemos la f.e.m. $E'(I)$ y hallamos gráficamente y basándonos en la figura 5-27, b, las intensidades I_1 e I_3 ó I_2 e I_4 , para cada valor de dicha f.e.m.

Construimos luego sobre los mismos ejes coordenados (fig. 5-28), la curva $(I_1 + I_3)E'$ o también la $(I_2 + I_4)E'$. Dado que la intensidad $I = I_1 + I_3$ ó $I = I_2 + I_4$, la intensidad buscada será dada por la ordenada del punto a de intersección de las curvas $(I_1 + I_3)E'$ e $I(E')$ o también $(I_2 + I_4)E'$ e $I(E')$.

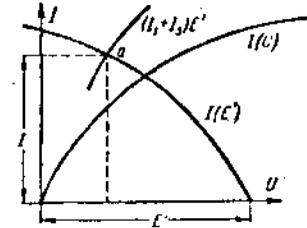


Fig. 5-28

Después de esto hallamos la f.e.m. $E'(I)$ y basándonos en el esquema de la figura 5-27, b, determinamos fácilmente las intensidades en las ramas restantes del esquema.

Debemos destacar que en el caso en que $r(I) = 0$, es decir, cuando en la rama que contiene la f.e.m. E no hay elemento no lineal, resulta fácil determinar las intensidades de todas las ramas, gráficamente, del esquema 5-27, b, en el cual se conoce la f.e.m. $E'(I) = E$.

5-7. Aplicación de la teoría del dipolo y del cuadripolo activo al cálculo de circuitos que contienen elementos lineales y no lineales.

Para el cálculo de circuitos eléctricos ramificados que contienen elementos lineales y no lineales, se puede eventualmente aplicar el teorema del dipolo activo. En la figura 5-29, a, se muestra el esquema de un circuito ramificado que contiene un elemento no lineal $r_3(I_3)$.

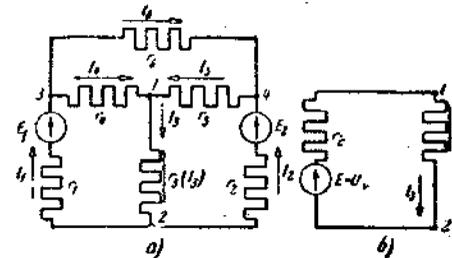


Fig. 5-29

Sean conocidas, en este esquema, las f.e.m. E_1 y E_2 de las fuentes, las resistencias r_1, r_2, r_3, r_4 y r_6 y la curva característica de Volt-Amper del elemento no lineal; se quiere determinar las intensidades en todas

las ramas. Aplicando el teorema del dipolo activo, representemos el esquema eléctrico dado (fig. 5-29, a) en forma de dos dipolos conectados en serie (fig. 5-29, b). En el esquema obtenido, $E = U_e$ es la tensión entre los puntos 1 y 2, estando desconectado el elemento no lineal; r_1 es la resistencia de entrada del dipolo activo respecto a los bornes 1-2; I_3 es la intensidad buscada en el elemento no lineal, que puede ser fácilmente hallada en el esquema de la figura 5-29, b por el método anteriormente expuesto. Conociendo la intensidad I_3 se puede volver al esquema inicial (fig. 5-29, a) y de acuerdo a las leyes de Kirchhoff o aplicando otros métodos de cálculo, se pueden determinar analíticamente las intensidades en las ramas restantes.

Se puede obtener también el esquema equivalente de la figura 5-29, b sin aplicar el teorema del dipolo activo. A tal efecto, se conviene transformar el triángulo de resistencias r_4 , r_5 y r_6 en una estrella equivalente, y las dos ramas paralelas obtenidas en virtud de la transformación pueden ser reemplazadas por una rama que tendría una fuente de f.e.m. E y una resistencia interna equivalente r_1 .

Demostraremos que la aplicación del teorema del dipolo activo permite, a veces, calcular muy simplemente un circuito ramificado con varios elementos no lineales, transformando previamente el esquema dado en uno más simple.

En la figura 5-30 vemos el esquema de un puente con dos elementos no lineales y tres lineales. Sean dadas las curvas de Volt-Ampere de los elementos no lineales como también las resistencias

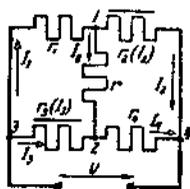


FIG. 5-30

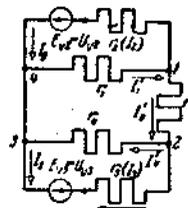


FIG. 5-31

r_3 , r_1 y r_4 y la tensión U ; se quiere determinar las intensidades en todas las ramas. Desconectemos del circuito simultáneamente la segunda y la tercera rama y hallemos las tensiones U_{e2} y U_{e3} en los bornes de esas ramas.

Luego, del mismo modo que en el cálculo del circuito lineal (fig. 3-11) conectemos en las ramas que se encuentran en circuito abierto las fuentes de f.e.m. $E_{e2} = U_{e2}$ y $E_{e3} = U_{e3}$, y pongamos en cortocircuito los bornes 3 y 4. Como resultado obtenemos el esquema de la figura 5-31 cuyas intensidades I_2 e I_3 son iguales a las intensidades reales de las ramas correspondientes del circuito dado. Para calcular el esquema obtenido (fig. 5-31) formado por una conexión mixta de elementos lineales y no lineales, se puede aplicar uno de los métodos antes expuestos.

Debemos observar especialmente que a veces al poner en circuito abierto las ramas que contienen elementos no lineales, éstas se desconectan de la parte restante del esquema y surge una indeterminación de las tensiones en los bornes de dichas ramas. Por ejemplo, se produce la indeterminación al querer hallar las tensiones U_{e3} , U_{e4} y U_{e5} en el esquema de la figura 5-32, obtenido al poner en circuito abierto, simultáneamente, tres ramas que contienen elementos no lineales $r_3(I_3)$, $r_4(I_4)$ y $r_5(I_5)$. Es fácil eliminar la indeterminación de la siguiente manera: si igualamos a cero la tensión en los bornes de una de las ramas, por ejemplo la U_{e3} y unimos los puntos 1 y 1' con un conductor de resistencia nula (representado por una línea de puntos en el esquema de la fig. 5-32), el régimen no se modificará, ya que las intensidades en todas las ramas que contienen elementos no lineales siguen siendo iguales a cero. Por consiguiente, para calcular en esquema dado basta determinar las tensiones U_{e4} y U_{e5} . Las intensidades en los elementos no lineales pueden hallarse ahora del esquema de la figura 5-33, el cual, mediante la transformación de un triángulo de resistencias r_1 , r_2 y r_3 en una estrella equivalente, se reduce a un esquema con dos nudos.

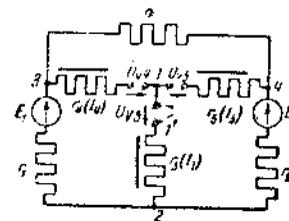


FIG. 5-32

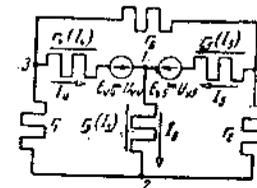


FIG. 5-33

De modo que en caso de producirse indeterminación de las tensiones al ponerse en cortocircuito las ramas que contienen elementos no lineales, corresponde no abrirlas todas para poder hallar las tensiones desconocidas en sus bornes. Debe observarse que las intensidades en todas las ramas que contienen elementos no lineales sean nulas igual que en las ramas desconectadas.

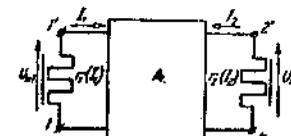


FIG. 5-34

Examinemos otro procedimiento de cálculo aplicable a los circuitos ramificados de configuración arbitraria que contienen dos elementos no lineales y otros lineales, basado en la aplicación de un esquema equivalente en T correspondiente a un cuadripolo activo. En la figura 5-34 se muestra un cuadripolo lineal activo en forma de rectángulo al cual están conectados dos elementos no lineales $r_1(I_1)$ y $r_2(I_2)$. Sustituamos el cuadripolo activo por un esquema en T (fig. 5-35). Las f.e.m. E_{12} y E_{23} de las fuentes conectadas en dicho esquema, son iguales a las tensiones existentes en los bornes 1-1' y 2-2' cuando los dos elementos no lineales están en circuito abierto. Los elementos pasivos del esquema equivalente pueden hallarse del mismo modo que en el punto 3-7.

Conociendo las curvas características de los elementos no lineales y los parámetros del esquema equivalente de dos nudos (fig. 5-35) será fácil determinar las intensidades I_1 e I_2 , en los elementos no lineales, por los métodos ante expuestos.

Observemos que, por cuanto el régimen de un cuadripolo activo y de su esquema equivalente queda expresado por dos ecuaciones (3-36), su resolución simultánea por medio de las curvas características $I_1(U_1)$ e $I_2(U_2)$, permite encontrar grafoanalíticamente las intensidades I_1 e I_2 en los elementos no lineales.

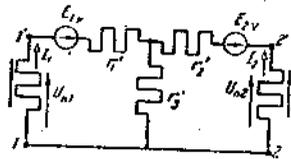


Fig. 5-35

Para ello hay que determinar previamente las constantes a, b, c, d , y las intensidades I_{1c} e I_{2c} o las f.e.m. E_{1v} y E_{2v} ; luego proponerse distintos valores de la tensión U_2 y determinar los correspondientes valores de la intensidad I_2 de acuerdo a la curva característica $I_2(U_2)$. Una vez sustituidos dichos valores en la ecuación (3-36), se puede encontrar la relación entre la tensión U_1 y la intensidad I_1 y construir la curva característica $I_1(U_1)$ sobre los mismos ejes coordenados de la curva $I_1(U_1)$, dada para el elemento no lineal $r_1(I_1)$. El punto de intersección de dichas características dará la intensidad buscada I_1 y la tensión U_1 . Hechas estas operaciones se puede determinar la tensión U_2 y la intensidad I_2 analíticamente de las ecuaciones (3-36).

En conclusión, señalemos que una aplicación análoga del esquema equivalente y de las ecuaciones a un sexapolo y a octopolo, permite calcular un circuito ramificado con tres (B-9) y cuatro elementos no lineales.

Problema 5-1. En la figura 5-36 se ha representado un esquema que contiene las resistencias lineales $r_5 = 2 \Omega$, $r_6 = 4 \Omega$, $r_7 = 3 \Omega$, $r_8 = 3 \Omega$ y los elementos no lineales $r_1(I_1)$, $r_2(I_2)$, $r_3(I_3)$ y $r_4(I_4)$, cuyas curvas características están dadas en la figura 5-36, b. Determinar las intensidades en todas las ramas del esquema dado, sabiendo que la f.e.m. $E = 12 \text{ V}$, $E_1 = 6 \text{ V}$, $E_2 = 4 \text{ V}$ y $E_7 = 2 \text{ V}$.

Solución. Para determinar las intensidades I_1, I_2, I_3 e I_4 , pongamos en circuito abierto simultáneamente los elementos no lineales $r_1(I_1)$, $r_2(I_2)$ y $r_4(I_4)$ (fig. 5-36, c) y hallemos las tensiones U_{v1} , U_{v2} y U_{v4} en los bornes de las ramas correspondientes:

$$U_{v1} = (r_6 + r_5)I_v + E_1 = (4 + 2)1,166 + 6 = 13 \text{ V};$$

$$U_{v2} = -E_2 + (r_8 + r_7)I_v - E_7 = -4 + (3 + 3)1,166 - 2 = 1 \text{ V};$$

$$U_{v4} = -E_7 + (r_7 + r_6)I_v = -2 + (3 + 4)1,166 = 6,166 \text{ V},$$

donde

$$I_v = \frac{E + E_7}{r_5 + r_6 + r_7 + r_8} = \frac{12 + 2}{2 + 4 + 3 + 3} = 1,166 \text{ A}.$$

Señalemos que la intensidad en el elemento no lineal $r_3(I_3)$ de la figura 5-36, c, es igual a cero igual que en los elementos no lineales restantes; por tal motivo dejamos dicha rama cerrada.

Conectemos en las ramas que contiene los elementos no lineales, la f.e.m. $E_{v1} = U_{v1}$, $E_{v2} = U_{v2}$ y $E_{v4} = U_{v4}$ y pongamos en cortocircuito los bornes a los

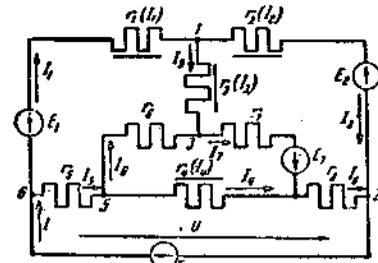


Fig. 5-36 a

que están conectados las f.e.m. E, E_1 y E_2 ; haciendo estas operaciones obtendremos el esquema representado en la figura 5-36, d.

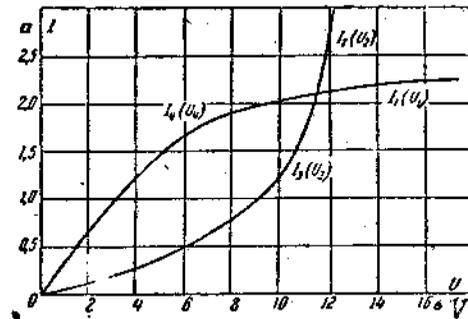


Fig. 5-36 b

Reemplacemos las dos ramas que contienen los elementos no lineales $r_1(I_1)$, $r_2(I_2)$ y las f.e.m. E_{v1}, E_{v2} por una rama equivalente.

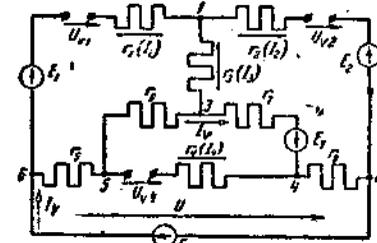
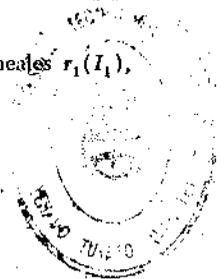


Fig. 5-36 c

A tal efecto construyamos en la figura 5-36, e, las curvas características $I_1(U_{12})$ e $I_2(U_{12})$ que responden a las ecuaciones:

$$U_{12} = E_{v1} - r_1(I_1) \cdot I_1 \quad \text{y} \quad U_{12} = -E_{v2} + r_2(I_2) \cdot I_2.$$



Luego restando las ordenadas de la curva $I_2(U_{12})$ de las ordenadas de la $I_1(U_{12})$ (de acuerdo a la ecuación $I_1 - I_2 = I_3$) para los mismos valores de la tensión U_{12} , hallamos la característica resultante $(I_1 - I_2)U_{12}$ para las dos ramas paralelas. El segmento Oa (fig. 5-36, e) evidentemente determina la f.e.m. equivalente $E_{eq} = 9V$. Dado que la f.e.m. E_{eq} , la tensión U_{12} y la tensión U_{eq} están ligadas

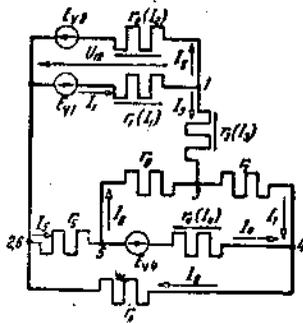


FIG. 5-36 d

en los bornes del elemento no lineal equivalente por la igualdad $E_{eq} = U_{12} + U_{13}$, entonces, para construir la curva característica $(I_1 - I_2)U_{eq}$, restaremos de la f.c.m. E_{eq} , las abscisas de la curva $(I_1 - I_2)U_{12}$ (fig. 5-36, f). Sumando las abscisas de las curvas (fig. 5-36, f) $(I_1 - I_2)U_{eq}$ e $I_3(U_3)$ para los mismos valores de las intensidades $(I_1 - I_2)$ e I_3 , obtendremos, para el elemento no lineal equivalente, la curva característica de Volt-Ampere $I_3(U_{eq} + U_3) = I_3(U_{3-1})$. Resulta así que las tres ramas que contienen elementos no lineales quedan reemplazadas

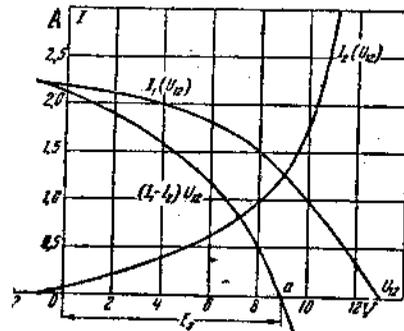


FIG. 5-36 e

por una sola equivalente con la f.e.m. $E_{eq} = 9V$ y el elemento no lineal $r_{3-1}(I_3)$ (fig. 5-36, g). Consideremos el esquema obtenido respecto a los pares de bornes 5-4 y 3-2, 6, a los que están conectados los elementos no lineales, como un cuadrípulo, y reemplacémoslo por un esquema equivalente en T (fig. 5-36, h). Con tal objeto hallemos las constantes del cuadrípulo aplicando las ecuaciones (3-21) y (3-22) y determinemos de acuerdo a las fórmulas (3-29) las resistencias del esquema equivalente de la figura 5-36, h; $r'_1 = 2,43 \Omega$; $r'_2 = 2,51 \Omega$ y $r'_3 = 0,49 \Omega$.

Observemos que las intensidades I_1 e I_3 de las ramas del esquema equivalente (fig. 5-36, h) son iguales a las intensidades correspondientes de las ramas del esquema dado (fig. 5-36, a).

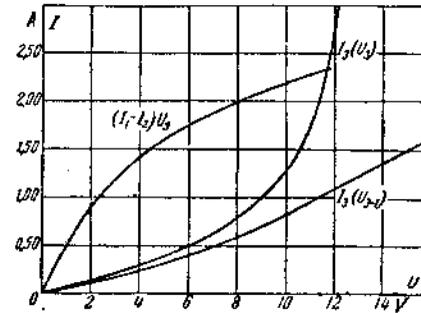


FIG. 5-36 f

Para el esquema equivalente de la figura 5-36, h, son válidas las ecuaciones:

$$U_{ob} = E_{eq} - U_4 - r'_1 I_1 = -r'_3 I_{ba} = -E_{eq} + U_{3-1} + r'_2 I_3$$

e

$$I_1 + I_{ba} = I_3$$

Por lo tanto para determinar las intensidades I_1 e I_3 , construiremos en la figura 5-36, i, para un esquema de dos nudos, las características $I_1(E_{r1} - U_4 -$

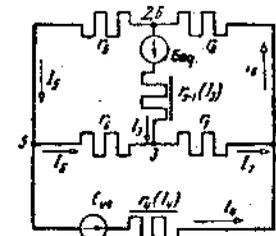


FIG. 5-36 g

$-r'_1 I_1) = I_1(U_{ob})$, $I_3(-E_{eq} + U_{3-1} + r'_2 I_3) = I_3(U_{ob})$ e $I_{ba}(U_{ob})$. Luego, sumando las ordenadas de las características $I_1(U_{ob})$ e $I_{ba}(U_{ob})$, para los mismos valores de la tensión U_{ob} , trazaremos la curva auxiliar $(I_1 + I_{ba})U_{ob}$. Evidente-

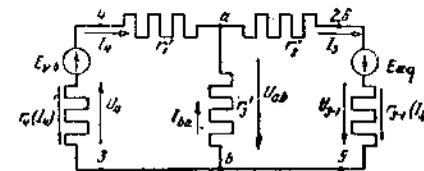


FIG. 5-36 h

mento, la ordenada del punto de intersección a de dicha curva con la característica $I_3(U_{ab})$, nos dará la intensidad buscada $I_3 \approx 0,5$ A, y la abscisa del mismo punto, la tensión $U_{ab} \approx 0,25$ V. A esta tensión le corresponde, en la curva $I_4(U_{ab})$, la intensidad $I_4 \approx 1$ A.

El gráfico $(I_1 - I_2)U_{12}$ (fig. 5-36, c) permite determinar, partiendo de la intensidad conocida $I_3 = I_1 - I_2 = 0,5$ A, la tensión $U_{12} = 8$ V, y conociendo esa tensión, determinamos por las curvas características $I_1(U_{12})$ e $I_2(U_{12})$ las intensidades $I_1 = 1,5$ A e $I_2 = 1$ A.

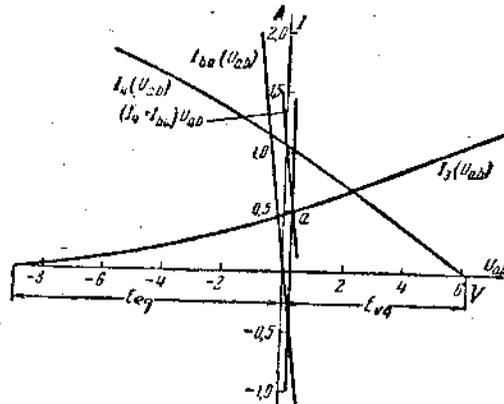


FIG. 5-36

Hallamos las tensiones en los bornes de los elementos no lineales, de las curvas características de la figura 5-36, b: $U_1 = 5$ V, $U_2 = 9$ V, $U_3 = 6$ V y $U_4 = 3$ V. Finalmente, conociendo las intensidades I_3 , I_2 , I_4 e I_1 y las tensiones U_1 , U_2 , U_3 y U_4 , se determinan fácilmente las intensidades en las ramas restantes del esquema dado (fig. 5-36, a), por cualquier método de cálculo de los circuitos lineales: $I_5 = 1,5$ A, $I_6 = 0,5$ A, $I_7 = 1$ A, $I_8 = 2$ A e $I = 3$ A.

5-8. Estabilidad del régimen en circuitos simples no ramificados con elementos no lineales.

Decimos que un circuito está en régimen estable cuando, para variaciones relativamente pequeñas de la corriente y de la tensión, recupera su estado eléctrico inicial.

Los fenómenos observados en el circuito eléctrico durante su desviación del régimen estable y durante su regeneración, son acompañados por una variación de las corrientes y de las tensiones en el tiempo. A su vez, la presencia de corrientes y tensiones variables en el tiempo trae como consecuencia la aparición de f.e.m. de autoinducción en el circuito.

Examinemos el aspecto cualitativo de los fenómenos en régimen estable e inestable, en los circuitos no ramificados más simples.

Tomemos como ejemplo un arco eléctrico alimentado por una

fuerza de tensión y conectado en serie con cierta resistencia suplementaria r (fig. 5-37).

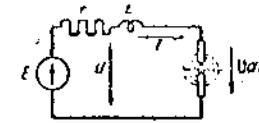


FIG. 5-37

Demostremos primero que para $r = 0$ no se puede obtener en la práctica una ignición estable del arco. En la figura 5-38 se pueden ver la curva característica de Volt-Ampere del arco $U_{ar}(I)$ y la recta $U(I) = E$, paralela al eje de las abscisas. En el punto a de intersección de la curva $U_{ar}(I)$ y de la recta $U = E$, la tensión en los bornes de la fuente U es igual a la tensión existente en el arco U_{ar} . A dicha tensión corresponde la intensidad I_1 .

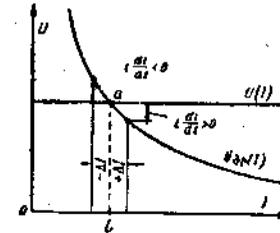


FIG. 5-38

Supongamos que la intensidad, en virtud de causas cualesquiera, varía en un cierto valor positivo o negativo $\pm \Delta I$. Durante el proceso de variación de la intensidad, variará el flujo magnético y se producirá una f.e.m. de autoinducción en el circuito $e_L = -L \frac{di}{dt}$, donde L es la inductividad del circuito (fig. 5-37).

De acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff escribiremos la ecuación

$$U + e_L = u_{ar}$$

o también

$$L \frac{di}{dt} = U - u_{ar}$$

donde $L \frac{di}{dt} = -e_L$ es la parte de la tensión U que equilibra la f.e.m. de autoinducción.

De esa ecuación y de la figura 5-38 se desprende directamente que $L \frac{di}{dt} = dU > 0$ para $I > I_1$. Dado que $L \frac{di}{dt} > 0$, la velocidad de variación de la intensidad $\frac{di}{dt}$, es también positiva y la intensidad

en el circuito seguirá en aumento. Al disminuir la intensidad en una cantidad ΔI ; la tensión $L \frac{di}{dt}$ y, por consiguiente, la velocidad de variación de la intensidad $\frac{di}{dt}$ serán negativas. De allí que la intensidad en el circuito disminuirá. De manera que para un aumento o una disminución imperceptible de la intensidad, circunstancia siempre posible en las condiciones reales, se producirá en el circuito un régimen inestable.

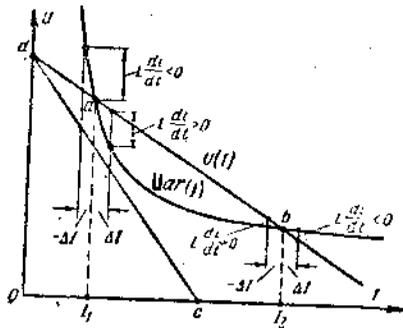


FIG. 5-39

Para lograr una ignición estable del arco, es necesario conectar en serie con él, una resistencia suplementaria r , llamada resistencia de lastre (fig. 5-37). Examinaremos la estabilidad del régimen en ese caso.

Vamos a considerar este esquema como un agrupamiento en serie de un dipolo lineal activo (con fuente de f.e.m. E y resistencia r) y un elemento no lineal, el arco eléctrico. En la figura 5-39 se ve la característica exterior del dipolo lineal activo que es la recta $U = E - rI = U(I)$ y la curva característica de Volt-Ampere del arco $U_{ar}(I)$.

De la figura 5-39 se desprende que sólo dos valores de la intensidad, la I_1 y la I_2 satisfacen a las ecuaciones

$$E - rI_1 = U_{ar1} \quad \text{y} \quad E - rI_2 = U_{ar2}$$

respectivamente.

Sin embargo un estado eléctrico estable existirá sólo en el punto b . En efecto, si la intensidad I_1 (punto a) por alguna razón crece en una cantidad ΔI , durante el proceso de variación de la intensidad en el circuito surgirá una f.e.m. de autoinducción $e_L = -L \frac{di}{dt}$. De acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff tenemos:

$$E - rI = u_{ar} + L \frac{di}{dt} \tag{5-4}$$

Como $L \frac{di}{dt} > 0$, la velocidad de variación de la intensidad $\frac{di}{dt}$ será también mayor que cero y en consecuencia la intensidad en el

circuito seguirá creciendo hasta alcanzar el valor I_2 . Al disminuir la intensidad I_1 en una cantidad ΔI , $L \frac{di}{dt} < 0$ y $\frac{di}{dt} < 0$ y por consiguiente la intensidad seguirá decreciendo hasta llegar a cero.

Vemos pues que el régimen en el punto a es inestable.

Las relaciones en el punto b son completamente distintas. Si la intensidad I_2 crece en una cantidad ΔI , entonces, de acuerdo a la ecuación (5-4) y a la figura 5-39, $L \frac{di}{dt} < 0$ y $\frac{di}{dt} < 0$, como resultado la intensidad disminuirá hasta llegar a I_2 . Si la intensidad I_2 decrece en una cantidad ΔI , $L \frac{di}{dt} > 0$ y $\frac{di}{dt} > 0$ a raíz de lo cual la intensidad aumentará hasta alcanzar el valor decreciente I_2 . De modo que en el punto b el régimen del circuito será estable.

Para una resistencia r muy grande, es imposible que funcione el arco ya que para cualquier valor de la intensidad, la tensión U en los bornes del dipolo lineal (las ordenadas de la recta cd en la figura 5-39) es menor que la tensión U_{ar} , necesaria para la ignición del arco.

Aprovechando los ejemplos examinados se pueden encontrar las condiciones que determinan la estabilidad del régimen en el circuito. En los puntos a (fig. 5-38 y 5-39), de estado inestable, la derivada de la tensión en los bornes del dipolo lineal respecto a la intensidad es mayor que la derivada de la tensión respecto a la intensidad para la curva característica de Volt-Ampere, es decir, $\frac{dU}{dI} > \frac{dU_{ar}}{dI}$. En el punto b (fig. 5-39) correspondiente al estado estable del circuito, la derivada de la tensión en los bornes del dipolo activo respecto a la intensidad, es menor que la derivada de la tensión respecto a la intensidad para la curva característica de Volt-Ampere del arco eléctrico, es decir:

$$\frac{dU}{dI} < \frac{dU_{ar}}{dI}$$

Demostraremos que esa expresión sigue siendo válida en un caso más general cuando el circuito eléctrico consta de dos dipolos no lineales, uno pasivo y otro activo, conectados en serie. Sean dadas en la figura 5-40 la característica exterior $U_a(I)$ del dipolo activo no lineal

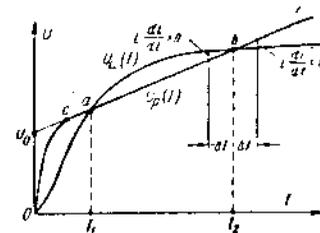


FIG. 5-40

y la característica de Volt-Ampere $U_p(I)$ del dipolo pasivo no lineal. De la figura 5-40 se ve que la característica de Volt-Ampere $U_p(I)$ puede ser reemplazada en el tramo cf por una línea recta, dada por la ecuación

$$U_p = U_0 + r_w I.$$

Estas curvas se cortan en dos puntos a y b . En este caso, del mismo modo que en el circuito del arco eléctrico, sólo el punto b presentará un estado estable. En efecto, si la intensidad I_2 crece en una cantidad ΔI , de la ecuación

$$U_a = U_0 + r_w I + L \frac{di}{dt}$$

y de la figura 5-40, se deduce que

$$L \frac{di}{dt} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{di}{dt} < 0.$$

Como resultado la intensidad se reduce hasta igualarse a I_2 . Disminuyendo I_2 en una cantidad ΔI , la intensidad crece nuevamente hasta I_2 ya que $\frac{di}{dt} > 0$.

Del mismo modo se puede demostrar que en el punto a el régimen será inestable.

La pendiente de las curvas $U_a(I)$ y $U_p(I)$ en los puntos a y b indica que en el punto a rige la desigualdad

$$\frac{dU_a}{dI} > \frac{dU_p}{dI};$$

y en el punto b

$$\frac{dU_a}{dI} < \frac{dU_p}{dI}.$$

Por consiguiente, el estado eléctrico del circuito será estable cuando la curva de V. A. del dipolo no lineal pasivo se corte con la curva característica exterior del dipolo activo lineal o no lineal y la derivada de la tensión respecto a la intensidad, tomada para la curva característica exterior, en el punto de intersección, será menor que la derivada tomada para la característica del dipolo no lineal pasivo.

CAPÍTULO VI

CIRCUITOS MAGNETICOS ✓

6-1. Conceptos fundamentales y leyes de los circuitos magnéticos.

En las máquinas eléctricas modernas, transformadores, aparatos y dispositivos electromagnéticos, se utilizan materiales ferromagnéticos para intensificar el flujo magnético en una determinada parte del espacio. Todos estos dispositivos constan fundamentalmente de núcleos de material ferromagnético y de bobinados, formados por conductores aislados, puestos sobre los núcleos. Estos suelen tener las formas más diversas en consonancia con las condiciones que deban satisfacer los distintos aparatos.

En la figura 6-1 se muestra un núcleo de tres columnas de un transformador trifásico. Las bobinas del transformador se disponen sobre las columnas verticales de núcleo.

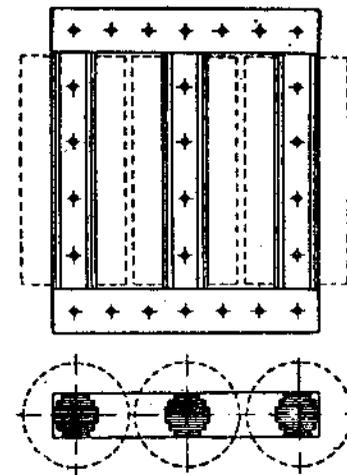


FIG. 6-1

En la figura 6-2, se representa esquemáticamente un magneto que se utiliza para el encendido de una mezcla de gases en los motores de

explosión. En el espacio comprendido entre las piezas polares de un imán permanente en forma de herradura, se coloca un núcleo metálico,

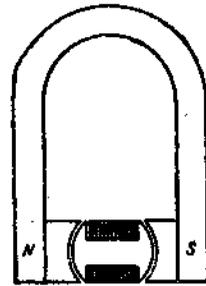


FIG. 6-2

fabricado igual que los extremos de los polos, de acero dulce. En este caso el campo magnético está dado por el magnetismo remanente.

Llamaremos *circuito magnético* al conjunto de los dispositivos destinados a crear un campo magnético en una determinada parte del espacio.

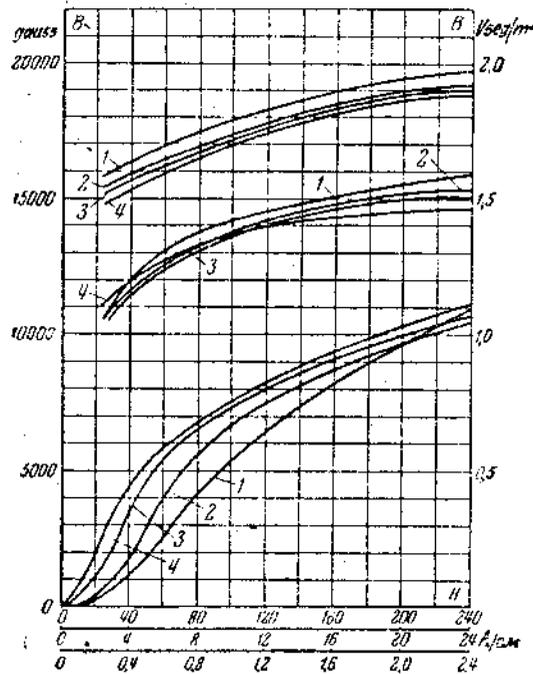


FIG. 6-3

1 -- E11; 2 -- E31; 3 -- E42; 4 -- E15.

El campo magnético se caracteriza por un vector de inducción magnética B , ligado con el vector de imantación I y con la intensidad del campo magnético H , para un medio homogéneo, por las siguientes relaciones

$$B = \mu_0 I + \mu_0 H, \quad B = \mu H.$$

La permeabilidad magnética $\mu = \frac{B}{H}$ depende de la estructura y del estado magnético del material y varía en general al variar la intensidad del campo magnético.

La dependencia entre B y H , para los materiales ferromagnéticos, no tiene una expresión analítica exacta, de modo que se la representa, para cada material ferromagnético, en forma de curvas de imantación, determinadas experimentalmente. En la figura 6-3 se muestran las curvas fundamentales de imantación de aceros electrotécnicos de distintas marcas.

Haciendo variar gradualmente la corriente en el bobinado de un núcleo anular de material ferromagnético dado, desde su valor máximo positivo $+I_{m\acute{a}x}$ hasta su valor máximo negativo $-I_{m\acute{a}x}$ y a la inversa

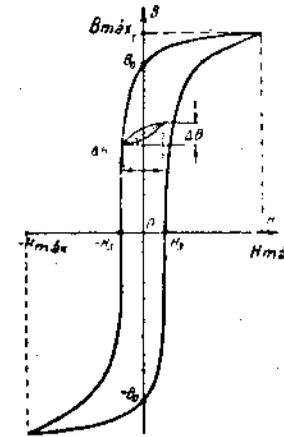


FIG. 6-4

de $-I_{m\acute{a}x}$ hasta $+I_{m\acute{a}x}$, la variación de la inducción en función de la intensidad del campo magnético queda representada en forma de una curva, llamada *lazo de histéresis*. En el primer ciclo de imantación y de desimantación, este lazo será abierto. Haciendo variar repetidas

* La relación entre la permeabilidad magnética y la intensidad del campo magnético fué establecida por primera vez en 1871 por el físico ruso A. G. Stolétov y publicada en su tesis de doctorado "Estudio sobre la función de magnetización del hierro dulce". Este trabajo sirvió de base para el cálculo de máquinas eléctricas y desempeñó un papel importante en el desarrollo de la electrotecnia.

veces la corriente dentro de los mismos límites se obtiene una serie de lazos que al principio se diferencian unos de los otros. Al cabo de varios ciclos el lazo se estabiliza (fig. 6-4).

Los segmentos determinados sobre el eje de las ordenadas por su intersección con las curvas de histéresis, representan la *inducción magnética remanente* (B_r y $-B_r$), y los determinados por la misma curva sobre el eje de las abscisas, representan la *fuerza coercitiva* o de retención (H_c y $-H_c$). La parte de la curva situada en el segundo cuadrante, limitada por la variación de la inducción desde B_r , $H = 0$ hasta $B = 0$ y $H = -H_c$, se llama *curva de desmagnetación* y se utiliza en el cálculo de los imanes permanentes. Las curvas fundamentales de imantación son los lugares geométricos de los vértices de los lazos de histéresis, correspondientes a distintos valores máximos de la corriente, $I_{máx}$.

En el cálculo de los circuitos que tienen imanes permanentes, son de gran importancia los *ciclos de histéresis singulares*, uno de cuyos vértices se sitúa en la curva de desmagnetación (fig. 6-4).

Generalmente los lazos de estos ciclos son estrechos y pueden ser reemplazados en los cálculos por líneas rectas que unen los vértices de las histéresis singulares. La relación entre la inducción magnética ΔB y la intensidad ΔH del ciclo de histéresis singular se llama coeficiente de recuperación y se determina por la expresión

$$k_r = \frac{\Delta B}{\Delta H}$$

Entre los valores que caracterizan los circuitos eléctricos y magnéticos existe una analogía formal que permite introducir, para los circuitos magnéticos, una serie de conceptos análogos a los que nos sirven para describir los fenómenos de los circuitos eléctricos. Esta analogía se extiende a los métodos de cálculo de los circuitos magnéticos.

En los circuitos eléctricos de corriente continua son las f.e.m. de las fuentes de energía eléctrica las que producen las corrientes; en los circuitos magnéticos son casi siempre las corrientes de los bobinados las que originan los flujos magnéticos. Por lo tanto entre las f.e.m. de los circuitos eléctricos y las corrientes de los bobinados, que crean los flujos magnéticos en el circuito magnético, existe una analogía formal. El flujo magnético es análogo a la corriente del circuito eléctrico. Aplicando la ley de la corriente total (ampere-vueltas totales) se puede introducir el concepto de fuerza de magnetización (fuerza magneto motriz) y de tensión magnética análogos a los conceptos de f.e.m. y de tensión en el circuito eléctrico.

Por analogía con la resistencia eléctrica se introduce el concepto de *resistencia magnética* (reluctancia) del circuito y una magnitud inversa de la resistencia llamada *conductancia magnética* (permeancia).

En los circuitos eléctricos de corriente continua se desprecia la corriente en la aislación de los conductores dado que la conductancia de la aislación es muy pequeña en comparación con la de los conduc-

tores. Las permeabilidades magnéticas del medio circundante y del material del circuito magnético se distinguen a veces muy poco una de la otra y los bobinados recorridos por las corrientes eléctricas ocupan apenas una pequeña parte en los tramos del circuito magnético. En estas condiciones hay que tomar en cuenta el flujo magnético que sale parcialmente de los límites del circuito.

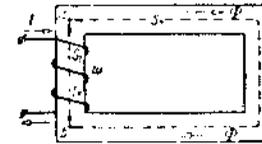


FIG. 6-5

El flujo magnético que se cierra en su totalidad en el circuito magnético se llama *flujo fundamental* y el que se cierra parcialmente en los tramos del circuito, y parcialmente en el medio circundante, *flujo de dispersión*.

En lo sucesivo examinaremos circuitos magnéticos que contienen principalmente materiales ferromagnéticos. En estos circuitos, las permeabilidades del circuito magnético y del medio circundante se diferencian marcadamente, de modo que se pueden despreciar generalmente los flujos de dispersión. Esto permite considerar que a cualquier espira de una misma bobina recorrida por una corriente I le corresponde un mismo flujo Φ , que permanece igual en toda la longitud del tramo.

Examinemos un circuito magnético no ramificado (fig. 6-5).

Sean los tramos l_1 y l_2 del mismo material ferromagnético y de secciones transversales distintas S_1 y S_2 . Siendo el flujo de dispersión despreciable, el flujo Φ , en cualquier sección transversal del circuito magnético, tendrá el mismo valor. Si la longitud del tramo es considerablemente mayor que sus dimensiones transversales, la inducción magnética en todos los puntos de dicho tramo puede considerarse uniforme.

En el primer tramo del circuito magnético la inducción $B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$ y en el segundo tramo $B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$.

Las intensidades del campo magnético en esos tramos serán

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1 \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_1 \mu_0 S_1} \quad \text{y} \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_2 \mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_2 \mu_0 S_2}$$

Aplicamos la ley de la corriente total al circuito que se cierra a lo largo de la línea media magnética, de longitud $l = l_1 + l_2$, obtendremos

$$F = \oint H dl = H_1 l_1 + H_2 l_2 = Iw. \quad (6-1)$$

En esta ecuación la magnitud $F = Iw$ se llama, por analogía con la

f.e.m. del circuito eléctrico, *fuerza magnetomotriz* (fuerza de magnetización) y que designaremos abreviadamente por f.m.m.

Sustituyendo H_1 y H_2 en la ecuación (6-1) tendremos:

$$F = Iw = \Phi \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} + \Phi \frac{l_2}{\mu_2 \mu_0 S_2} = \Phi R_{m1} + \Phi R_{m2}; \quad (6-2)$$

donde R_{m1} y R_{m2} son las reluctancias de los tramos.

El producto del flujo magnético por la resistencia R_{m2} puede llamarse, por analogía con el circuito eléctrico, *tensión magnética* y se toma en el sentido del flujo, desde el punto a hacia el punto b (fig. 6-5), es decir, $U_{mab} = \Phi R_{m2}$.

Por consiguiente, el flujo magnético

$$\Phi = \frac{Iw}{R_{m1} + R_{m2}} = \frac{Iw - U_{mab}}{R_{m1}} = \frac{U_{mab}}{R_{m2}}. \quad (6-3)$$

Esta ecuación es análoga a la ley de Ohm que rige para el circuito eléctrico.

Si en los tramos del circuito magnético no ramificado se sitúan varias bobinas con distinto número de espiras y distintas corrientes (fig. 6-6) la f.m.m. total será igual a la suma algebraica de las distintas f.m.m.

$$\Sigma F = \Sigma Iw = I_1 w_1 + I_2 w_2 - I_3 w_3 = \Sigma Hl = \Sigma \Phi R_m,$$

de donde

$$\Phi = \frac{I_1 w_1 + I_2 w_2 - I_3 w_3}{\Sigma R_m} = \frac{\Sigma Iw}{\Sigma R_m} = \frac{\Sigma F}{\Sigma R_m}; \quad (6-4)$$

donde ΣR_m es la resistencia magnética de todo el circuito.

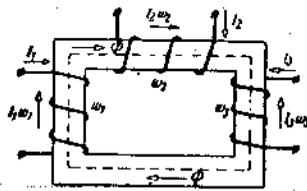


FIG. 6-6

El sentido de la fuerza magnetomotriz se relaciona con el sentido de la corriente en el bobinado por la regla del *sacacorchos*. Si se imprime al sacacorchos un movimiento de rotación en el mismo sentido que tiene la corriente en el arrollamiento, el sentido de la fuerza magnetomotriz coincidirá con el avance del sacacorchos.

Ya se sabe que las líneas vectoriales de la inducción magnética son cerradas, es decir, no tienen principio ni fin. De allí que el flujo que atraviesa cualquier superficie cerrada es siempre igual a cero. Ello

significa que para los nudos de los circuitos magnéticos será siempre válida la ecuación

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots = \Sigma \Phi = 0. \quad (6-5)$$

En esta ecuación se da el signo positivo a los flujos cuyo sentido positivo se aleja del nudo, y los signos negativos a los flujos cuyo signo positivo está dirigido hacia los nudos del circuito magnético (o viceversa), análogamente a los signos de la primera ley de Kirchhoff aplicada a los circuitos de corriente continua.

La ecuación (6-5) expresa la *primera ley de Kirchhoff para los circuitos magnéticos; la suma algebraica de los flujos magnéticos, en un nudo del circuito magnético es igual a cero.*

Aplicando la ley de la corriente total, se puede obtener, para el circuito magnético, una ecuación análoga a la segunda ley de Kirchhoff que rige para los circuitos eléctricos.

Examinemos el circuito magnético ramificado (fig. 6-7), que tiene seis tramos no ramificados de longitud l_1, l_2, \dots, l_6 e igual número de flujos magnéticos diferentes $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_6$. Supongamos que cada tramo esté hecho de un solo material y tenga una misma sección transversal en toda su longitud. Al mismo tiempo los distintos tramos pueden ser de diferentes materiales ferromagnéticos, y tener secciones transversales diferentes S_1, S_2, \dots, S_6 . Despreciando los flujos de dispersión y suponiendo que las longitudes de los tramos sean considerablemente mayores que sus dimensiones transversales, hallaremos las inducciones magnéticas en los sectores:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2}; \quad \dots; \quad B_6 = \frac{\Phi_6}{S_6}.$$

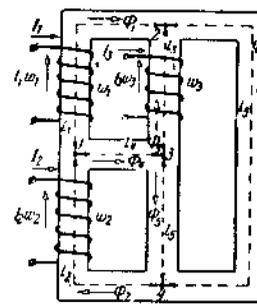


FIG. 6-7

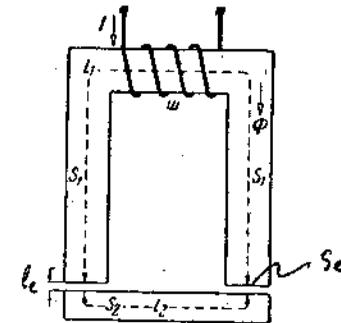


FIG. 6-8

Las intensidades del campo magnético, en los distintos tramos del circuito corresponderán a los valores de la inducción magnética de dichos tramos.

Apliquemos la ley de la corriente total al contorno cerrado 1-2-3-1 del circuito magnético de la figura 6-7. Para integrar a lo largo

de ese contorno, hagamos coincidir el sentido de circulación con el movimiento de la manecilla del reloj; tendremos entonces:

$$\Sigma F = \Sigma Iw = I_1 w_1 - I_3 w_3 = H_1 l_1 - H_3 l_3 - H_4 l_4. \quad (6-6)$$

Las componentes $H_3 l_3$ y $H_4 l_4$ tienen signo negativo dado que el sentido de circulación no coincide con el sentido positivo elegido para los flujos magnéticos ni para las intensidades del campo magnético en los tramos tercero y cuarto.

Dado que

$$H_1 = \frac{\Phi_1}{\mu_1 \mu_0 S_1}; \quad H_3 = \frac{\Phi_3}{\mu_3 \mu_0 S_3}; \quad H_4 = \frac{\Phi_4}{\mu_4 \mu_0 S_4};$$

sustituyendo las intensidades del campo magnético en la ecuación (6-6), tendremos

$$I_1 w_1 - I_3 w_3 = \Phi_1 \frac{l_1}{\mu_1 \mu_0 S_1} - \Phi_3 \frac{l_3}{\mu_3 \mu_0 S_3} - \Phi_4 \frac{l_4}{\mu_4 \mu_0 S_4} = \\ = \Phi_1 R_{m1} - \Phi_3 R_{m3} - \Phi_4 R_{m4} = \Sigma \Phi R_m. \quad (6-7)$$

Análogamente se puede obtener la ecuación, por ejemplo para el circuito 1-2-3-4-1 (fig. 6-7).

$$I_1 w_1 - I_3 w_3 + I_2 w_2 = \Phi_1 R_{m1} - \Phi_3 R_{m3} + \Phi_2 R_{m2} = \Sigma \Phi R_m.$$

Generalizando para cualquier contorno (malla) cerrado, obtendremos:

$$\Sigma Iw = \Sigma F = \Sigma \Phi R_m = \Sigma Hl, \quad (6-8)$$

o sea la segunda ley de Kirchhoff para los circuitos magnéticos: La suma algebraica de las fuerzas magnetomotrices en una malla de un circuito magnético es igual a la suma algebraica de las tensiones magnéticas en dicha malla.

Señalemos que la resistencia de cualquier tramo de un circuito magnético no puede considerarse como una magnitud constante, debido a que la permeabilidad magnética varía con la inducción magnética. Por consiguiente, los cálculos de los circuitos magnéticos se pueden asimilar a los cálculos de los circuitos eléctricos de características no lineales.

6-2. Cálculo de los circuitos magnéticos no ramificados.

En el cálculo de circuitos magnéticos no ramificados, suelen presentarse dos tipos de problemas.

Unas veces se plantea la necesidad de determinar la corriente de magnetización en función de un flujo magnético dado; otras de determinar el flujo magnético, dada la corriente o la fuerza magnetomotriz. En ambos casos, por regla general, se suponen conocidas las dimensiones geométricas de todos los tramos del circuito, los materiales de

que están hechos, las curvas fundamentales de imantación y el número de espiras de las bobinas. En los circuitos magnéticos de materiales magnéticamente blandos y sin imanes permanentes, se puede despreciar generalmente la histéresis, es decir, considerar que la variación de la inducción en función de la intensidad del campo magnético comprende un solo grupo de valores correspondientes a una curva fundamental de imantación.

En la figura 6-8 se representa esquemáticamente el núcleo de un electroimán en forma de U y una placa de acero que cierra los extremos de aquél.

Entre los extremos del núcleo y la placa queda un entrehierro l_e . Se conocen las dimensiones del núcleo y de la placa, como también los materiales de que están hechos. Hay que determinar la corriente de imantación para la cual el flujo magnético en el entrehierro tenga un valor dado. Supongamos que la sección S_e del núcleo del electroimán sea la misma en todas sus partes y la sección de la placa sea igual a S_2 . En estas condiciones se puede considerar todo el circuito magnético como formado por tres tramos conectados en serie: el núcleo del electroimán, dos entrehierros y la placa de acero.

Para calcular el circuito magnético, fijemos la línea magnética media aproximada y determinemos las longitudes de sus distintos tramos. Siendo las secciones transversales de los núcleos, pequeñas en comparación con su longitud, las pequeñas inexactitudes que se pueden producir en la determinación de las longitudes medias no introducen en el cálculo errores esenciales.

La distribución exacta del flujo magnético en el entrehierro es difícil de determinar, pero siendo paralelos los planos de los cuerpos ferromagnéticos y para una pequeña longitud del entrehierro, el campo magnético en éste puede considerarse homogéneo y la sección S_e igual a la sección del núcleo S_1 .

Un circuito magnético no ramificado (fig. 6-8) puede representarse por un esquema equivalente, formado por tres resistencias conec-

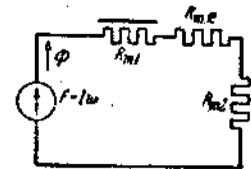


FIG. 6-8

tadas en serie R_{m1} , R_{me} y R_{m2} (fig. 6-9) y una f.m.m. $Iw = F$. En dicho esquema las resistencias R_{m1} y R_{m2} varían con el flujo magnético y la resistencia R_{me} es una magnitud constante.

La fuerza magnetomotriz es

$$F = Iw = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_e \cdot 2l_e.$$

no de espiras

Las inducciones magnéticas se determinan por las expresiones

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}; \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2}; \quad B_e = \frac{\Phi}{S_e}$$

Conociendo las inducciones magnéticas B_1 y B_2 y las curvas fundamentales de imantación para los materiales correspondientes, hallamos H_1 y H_2 . Para el entrehierro, $H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$. La corriente de magnetización es

$$I = \frac{Iw}{w} = \frac{H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_e \cdot 2l_e}{w}$$

Si la inducción magnética B está dada en gauss, la intensidad del campo magnético H , en el entrehierro se determinará en A/cm por la fórmula

$$H_e \text{ (A/cm)} = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{B_e \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 10^{-9}} \approx 0,8 B_e \text{ (gauss)}$$

Consideremos el mismo circuito magnético, en el cual se quiere determinar el flujo magnético para un valor dado de la f.m.m. Este problema no tiene una solución "directa" puesto que la relación entre el flujo y la corriente no es lineal.

El problema se puede resolver por tanteos sucesivos. Primero, nos proponemos un valor del flujo magnético, por ejemplo Φ' , luego igual que en el problema precedente "directo", encontramos la f.m.m. $F' = I'w = \Sigma(HI)'$. Si el valor de la f.m.m. obtenida coincide con la dada, $F = Iw$, el problema está resuelto; pero el primer tanteo no suele dar esa coincidencia. Entonces nos proponemos otros valores del flujo magnético Φ'' , Φ''' , etc., y hallamos los correspondientes valores de la f.m.m. $F'' = I''w$, $F''' = I'''w$, etc., con los que construimos la característica auxiliar $\Phi(\Sigma HI)$ (fig. 6-10).

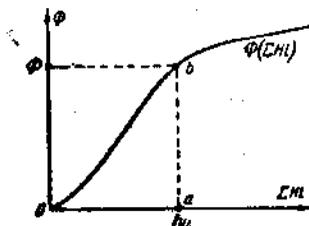


Fig. 6-10

Llevando sobre el eje de las abscisas la f.m.m. dada $F = Iw$ y trazando por el punto a una paralela al eje de las ordenadas hasta su intersección con la curva $\Phi(\Sigma HI)$ en el punto b , la ordenada ab nos dará el valor del flujo magnético buscado.

En los cálculos prácticos no tiene sentido construir toda la curva $\Phi(\Sigma HI)$ empezando desde cero. Para obtener el primer punto de esta curva igualemos la fuerza magnemotriz dada $F = Iw$ a la tensión magnética existente en el tramo de mayor resistencia magnética $R_m \Phi' = Iw$ y de esta igualdad, con ayuda de la curva de imanación, determinemos el flujo magnético máximo.

Cuando en el circuito magnético hay un entrehierro, éste suele ser precisamente el tramo de mayor resistencia magnética. Para el entrehierro, conforme a la figura 6-8, escribiremos la ecuación indicada en la forma siguiente: $\frac{2l_e}{\mu_0 S_e} \cdot \Phi' = Iw$; de donde

$$\Phi' = \frac{Iw}{\frac{2l_e}{\mu_0 S_e}}$$

Dado que los otros tramos del mismo circuito magnético, así como el tramo de resistencia magnética máxima, limitan el flujo magnético, los valores subsiguientes, necesarios para la construcción de la curva $\Phi(\Sigma HI)$ deberán ser menores que Φ' .

Al resolver problemas de este tipo, conviene resumir los cálculos en la tabla siguiente:

Φ /sg	$B_1 = \frac{\Phi}{S_1}$ V/sg/cm ²	$B_2 = \frac{\Phi}{S_2}$ V/sg/cm ²	$B_e = \frac{\Phi}{S_e}$ V/sg/cm ²	H_1 A/cm	H_2 A/cm	H_e A/cm	$H_1 l_1$ A	$H_2 l_2$ A	$H_e 2l_e$ A	ΣHI A
Φ'	B_1'	B_2'	B_e'	H_1'	H_2'	H_e'	$H_1' l_1$	$H_2' \cdot 2l_e$	$H_e' 2l_e$	(ΣHI)
Φ''	B_1''	B_2''	B_e''	H_1''	H_2''	H_e''	$H_1'' l_1$	$H_2'' \cdot 2l_e$	$H_e'' 2l_e$	(ΣHI)

Como el flujo magnético en todos los tramos de un circuito magnético no ramificado, tiene el mismo valor, la curva característica $\Phi(\Sigma HI)$ puede reconstruirse por analogía con el circuito eléctrico, sumando gráficamente las abscisas de la recta $\Phi(H_e \cdot 2l_e)$ y de las curvas $\Phi(H_1 l_1)$ y $\Phi(H_2 l_2)$ para los mismos valores del flujo magnético.

Es fácil construir la característica $\Phi(H_e \cdot 2l_e)$; por ser una recta que pasa por el origen de las coordenadas, hallando H_e para algún valor de Φ .

Las características $\Phi(H_1 l_1)$ y $\Phi(H_2 l_2)$ pueden construirse teniendo las curvas fundamentales de imanación para los materiales del primero y del segundo tramos del circuito magnético. Para ello, hay que multiplicar las ordenadas de las curvas de imanación por las secciones del primero y del segundo tramo, y las abscisas por sus longitudes.

6-3. Cálculo de los circuitos magnéticos ramificados.

El cálculo de los circuitos magnéticos ramificados está basado en la aplicación de las leyes de Kirchhoff.

En virtud de la relación no lineal entre la inducción y la intensidad del campo magnético en los materiales ferromagnéticos, los cálculos de esos circuitos se efectúan generalmente por métodos grafoanalíticos, análogos a los métodos de cálculo de los circuitos eléctricos no lineales (Cap. 5). Del mismo modo que en los circuitos eléctricos, ante todo es necesario indicar los sentidos de las fuerzas magneto-

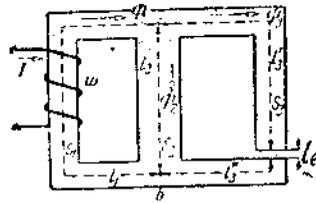


FIG. 6-11

motrices, si éstas son conocidas, o proponérselos si las f.m.m. son buscadas. Luego hay que proponerse los sentidos positivos de los flujos magnéticos y sólo entonces pasar a la formación del esquema equivalente y de su cálculo.

En la figura 6-11 se da el ejemplo de un circuito magnético ramificado que contiene una sola f.m.m. En la figura 6-12 se da el esquema equivalente para el mismo circuito magnético.

Para este circuito magnético se puede efectuar un cálculo "directo" si el núcleo central tiene la misma sección en toda su longitud \$l_2\$ y está hecha de un sólo material, queriéndose determinar la f.m.m. para un valor dado del flujo \$\Phi_3\$.

Conociendo el flujo \$\Phi_3\$, calculamos la inducción \$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}\$ y hallamos, de acuerdo a la curva de imanación, la intensidad del campo \$H_3\$. La tensión magnética en la tercera rama es

$$U_{m\ 3} = \sum Hl = H_3(l_3 + l_3') + H_1 l_1$$

Dado que la segunda y tercera ramas están conectadas en paralelo será \$H_2 I_2 = U_{m\ 3}\$. Habiendo calculado \$H_2 = \frac{U_{m\ 3}}{l_2}\$, hallamos \$B_2\$ de la curva de imanación.

El flujo \$\Phi_2 = B_2 S_2\$, y el flujo \$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3\$. Habiendo determinado \$\Phi_1\$, calculamos \$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}\$ y en la curva de imanación hallamos \$H_1\$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff, determinamos la f.m.m. \$F = Iw = H_1 l_1 + U_{m\ 3}\$.

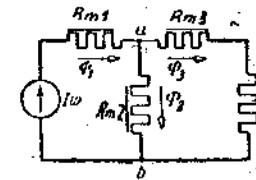


FIG. 6-12

El problema más general de calcular todos los flujos para una f.m.m. dada, puede resolverse por el método gráfico (fig. 6-13) análogo al que se utiliza para el cálculo de los circuitos de corriente continua integrado por elementos no lineales.

Construyamos a tal efecto, utilizando las curvas de imanación, la curva

$$\Phi_2(U_{m\ 3}) = \Phi_2(H_2 l_2)$$

y la curva

$$\Phi_3(U_{m\ 3}) = \Phi_3(H_3 l_3)$$

sumando las abscisas de la recta \$\Phi_3(H_3 l_3)\$ y de la curva \$\Phi_2(H_2 l_2)\$ para los mismos valores del flujo magnético \$\Phi_3\$ siendo \$l_3 = l_3' + l_3\$.

Sumando las ordenadas de las curvas \$\Phi_2(U_{m\ 3})\$ y \$\Phi_3(U_{m\ 3})\$ para los mismos valores de la tensión magnética \$U_{m\ 3}\$ construimos la curva \$(\Phi_2 + \Phi_3)U_{m\ 3}\$.

Los gráficos trazados equivalen a reemplazar dos ramas paralelas de resistencias \$R_{m2}\$ y \$R_{m3} + R_{m4}\$ por una resistencia no lineal, cuya curva característica es precisamente la \$(\Phi_2 + \Phi_3)U_{m\ 3}\$.

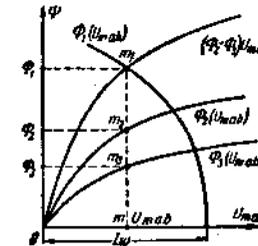


FIG. 6-13

Las construcciones subsiguientes, para el circuito no ramificado obtenido, se pueden efectuar igual que para el cálculo del circuito 6-9, o también construyendo la curva característica \$\Phi_1(Iw - H_1 l_1) = \Phi_1(U_{m\ 3})\$ (como en el cálculo del circuito eléctrico de la fig. 5-15). En la figura 6-13 el cálculo se efectuó de esta última manera.

El punto de intersección m_1 de la curva $\Phi_1(U_{m\ ab})$ con la curva $(\Phi_2 + \Phi_3)U_{m\ ab}$ determina la tensión magnética entre los puntos a y b y el flujo Φ_1 . Las ordenadas de los puntos de intersección m_2 y m_3 de la vertical $m_1 - m$ con las curvas $\Phi_2(U_{m\ ab})$ y $\Phi_3(U_{m\ ab})$ determinan los flujos Φ_2 y Φ_3 respectivamente.

Problema 6-1. En la figura 6-14, *a*, se muestra un núcleo de acero electro-técnico E 42.

Determinar las inducciones magnéticas en todos los tramos del circuito magnético, sabiendo que las secciones son $S_1 = S_2 = 5\text{ cm}^2$, $S_3 = 10\text{ cm}^2$, las longitudes de los tramos, $l_1 = 30\text{ cm}$, $l_2 = 40\text{ cm}$ y $l_3 = 10\text{ cm}$ y las fuerzas magnetomotrices $F_1 = I_1 w_1 = 440\text{ A}$ y $F_2 = I_2 w_2 = 280\text{ A}$.

Solución. El esquema equivalente para el circuito magnético dado está representado en la figura 6-14, *b*. Basándonos en las (6-5) y (6-8) estableceremos las ecuaciones:

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2;$$

$$I_1 w_1 = H_1 l_1 + U_{m\ ab};$$

$$I_2 w_2 = H_2 l_2 + U_{m\ ab}$$

y

$$U_{m\ ab} = H_3 l_3;$$

Para resolverlas, construiremos las curvas características para todos los tramos del circuito magnético:

$$\Phi_1(I_1 w_1 - H_1 l_1) = \Phi_1(U_{m\ ab});$$

$$\Phi_2(I_2 w_2 - H_2 l_2) = \Phi_2(U_{m\ ab})$$

y

$$\Phi_3(H_3 l_3) = \Phi_3(U_{m\ ab}).$$

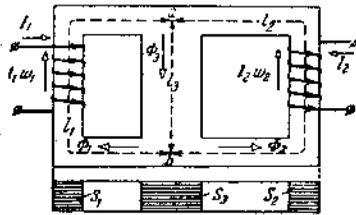


FIG. 6-14 a

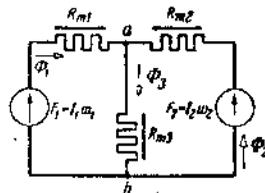


FIG. 6-14 b

A tal efecto nos proponemos los valores de Φ_1 y Φ_2 y hallamos las inducciones en los distintos tramos y luego, de acuerdo a la curva de imantación, determinamos las intensidades del campo magnético. Según los valores conocidos de las intensidades del campo magnético hallamos las tensiones magnéticas en los tramos para distintos flujos. Los resultados de los cálculos están reunidos en la tabla:

$\Phi_1 = \Phi_2$ V/sg	$B_1 = B_2 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{\Phi_2}{S_2}$ V/sg/cm ²	$H_1 = H_2$ A/cm	$H_1 l_1$ A	$U_{m\ ab} = I_1 w_1 - H_1 l_1$ A	$H_2 l_2$ A	$U_{m\ ab} = I_2 w_2 - H_2 l_2$ A	Φ_3 V/sg	$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3}$ V/sg/cm ²	H_3 A/cm	$U_{m\ ab} = H_3 l_3$ A
0	0	0	0	440	0	280	0	0	0	0
25·10 ⁻⁵	5·10 ⁻⁵	0,55	16,5	423,5	22,0	258	70·10 ⁻⁵	7·10 ⁻⁵	0,9	258
30·10 ⁻⁵	6·10 ⁻⁵	0,70	21,0	419	28,0	252	80·10 ⁻⁵	8·10 ⁻⁵	1,2	252
35·10 ⁻⁵	7·10 ⁻⁵	0,90	27,0	413	36,0	244	90·10 ⁻⁵	9·10 ⁻⁵	1,55	244
40·10 ⁻⁵	8·10 ⁻⁵	1,20	36,0	404	48	232	100·10 ⁻⁵	10·10 ⁻⁵	2,0	232
45·10 ⁻⁵	9·10 ⁻⁵	1,55	46,5	393,5	62	218	110·10 ⁻⁵	11·10 ⁻⁵	3,5	218
50·10 ⁻⁵	10·10 ⁻⁵	2,00	60,0	380	80	200	120·10 ⁻⁵	12·10 ⁻⁵	5,0	200
55·10 ⁻⁵	11·10 ⁻⁵	3,5	105,0	335	140	140	130·10 ⁻⁵	13·10 ⁻⁵	8,0	140
60·10 ⁻⁵	12·10 ⁻⁵	5,0	150,0	290	200	80	140·10 ⁻⁵	14·10 ⁻⁵	12,0	80



Con los datos de la tabla construimos (fig. 6-14, c): $\Phi_1(U_{m\ ab})$, $\Phi_2(U_{m\ ab})$ y $\Phi_3(U_{m\ ab})$. Como los flujos deben satisfacer a la ecuación $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3$, construimos la curva auxiliar $(\Phi_1 + \Phi_2)U_{m\ ab}$. Para ello sumamos las ordenadas de las curvas $\Phi_1(U_{m\ ab})$ y $\Phi_2(U_{m\ ab})$ para los mismos valores de la tensión magné-

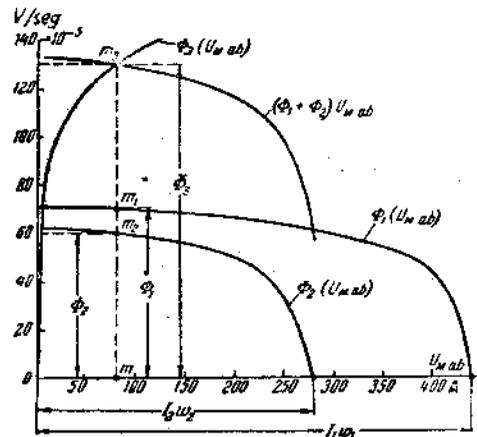


FIG. 6-14 c

tica $U_{m\ ab}$. La ordenada del punto m_3 de intersección de la curva $(\Phi_1 + \Phi_2)U_{m\ ab}$ con la curva $\Phi_3 U_{m\ ab}$ nos da el valor del flujo $\Phi_3 = 130 \cdot 10^{-5}$ V/sg ya que para ese punto son válidas las ecuaciones

$$I_1 w_1 - H_1 l_1 = I_2 w_2 - H_2 l_2 = H_3 l_3 \quad \text{y} \quad \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi_3.$$

Para hallar los flujos Φ_1 y Φ_2 , tracemos por m_3 una paralela al eje de las ordenadas hasta su intersección con las curvas $\Phi_1(U_{m\ ab})$ y $\Phi_2(U_{m\ ab})$ obteniendo los segmentos mm_1 y mm_2 que nos dan los flujos $\Phi_1 = 70 \cdot 10^{-5}$ V/sg y $\Phi_2 = 60 \cdot 10^{-5}$ V/sg. Conociendo los flujos determinamos las inducciones magnéticas:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{70}{5} \cdot 10^{-5} = 14 \cdot 10^{-5} \text{ V/sg/cm}^2;$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{60}{5} \cdot 10^{-5} = 12 \cdot 10^{-5} \text{ V/sg/cm}^2;$$

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{130 \cdot 10^{-5}}{10} = 13 \cdot 10^{-5} \text{ V/sg/cm}^2.$$

6.4. Cálculo del circuito magnético de un imán anular permanente con entrehierro.

En la figura 6-15 se muestra esquemáticamente un núcleo anular de acero con entrehierro. Se trata de determinar el flujo magnético en el entrehierro, sabiendo que el núcleo fué previamente imantado hasta la saturación. Están dadas las dimensiones del núcleo y la curva de desimantación $B \equiv f(H)$ del material.

Si no hubiera entrehierro, entonces, después de la imantación, la inducción magnética en el núcleo sería igual a la inducción remanente B_0 y la intensidad del campo sería igual a cero, circunstancias que se desprenden directamente de la ley de la corriente total. En el lazo de histéresis, ese estado corresponde al punto superior de la curva de desimantación (fig. 6-4). Habiendo entrehierro, la intensidad del campo no es igual a cero, lo cual es fácil de demostrar, aplicando la ley de la corriente total.

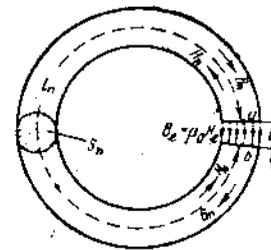


FIG. 6-15

La integral del vector de intensidad del campo magnético, a lo largo de la línea media cerrada del núcleo anular, es $\oint H dl = 0$, puesto que no hay corriente magnetizante.

Supongamos que la intensidad del campo H_n en el núcleo de acero es la misma en todos los puntos de la línea media. La intensidad del campo en el entrehierro es

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$$

Elijamos la dirección del recorrido para el contorno de integración, de tal modo que coincida con el sentido de la línea del vector de la inducción magnética. Basándonos en la ley de la corriente total

$$\oint H dl = H_n l_n + H_e l_e = 0. \tag{6-9}$$

Para una longitud insignificante del entrehierro se puede considerar la sección S_e igual a la sección del núcleo, es decir considerar que la inducción en todos los puntos del circuito magnético es la misma,

$$B_n = \frac{\Phi}{S_n} = \frac{\Phi}{S_e} = B_e.$$

Entonces de la (6-9)

$$H_n = -H_e \frac{l_e}{l_n} = -\frac{B_n}{\mu_0} \cdot \frac{l_e}{l_n} = -N_B \frac{B_n}{\mu_0};$$

donde

$$N_B = \frac{l_e}{l_n}$$

se llama *coeficiente de desimantación por inducción*.

Por consiguiente, en este caso, a pesar de que no hay corrientes de imantación, la intensidad del campo magnético en todos los puntos del núcleo anular no es igual a cero. En el entrehierro, el sentido del vector de la intensidad de campo coincide con el sentido del vector de inducción magnética, mientras que en el interior del núcleo ambos tienen sentidos opuestos (fig. 6-15).

El valor negativo de la intensidad del campo magnético indica que en presencia del entrehierro, la inducción magnética B es menor que la inducción remanente $B_0 = \mu_0 J$; lo dicho se desprende de la expresión $B = \mu_0 J + \mu_0 H_n$.

Dado que al valor negativo del campo magnético H_n corresponde un valor positivo de la inducción $B_n = B_0$, el estado magnético del núcleo quedará determinado por uno de los puntos de la curva de desimantación (segundo cuadrante del lazo de histéresis).

Construyamos el gráfico de variación del flujo magnético $\Phi_n = B_n S_n$ en función de la tensión magnética $U_{m,n} = U_{m,ab} = H_n l_n$, tomada en el sentido del vector H entre los puntos a y b de los extremos del núcleo; esta relación se obtiene de la curva de desimantación, multiplicando simplemente sus ordenadas por S_n y sus abscisas por l_n (fig. 6-16). Construyamos sobre los mismos ejes la curva que expresa el flujo magnético en el entrehierro, en función de la tensión magnética tomada en el sentido de H_e entre los mismos puntos a y b del núcleo, utilizando el mismo procedimiento que para la construcción de la curva $\Phi_1(U_{m,ab})$ en la figura 6-13. Esa tensión es

$$U_{m,e} = U_{m,ab} = R_{m,e} \Phi_e = H_e l_e = \frac{B_e}{\mu_0} l_e = \Phi_e \frac{l_e}{\mu_0 S_n};$$

de donde

$$\Phi_e = \frac{U_{m,e}}{R_{m,e}} = \frac{U_{m,e}}{\frac{l_e}{\mu_0 S_n}}$$

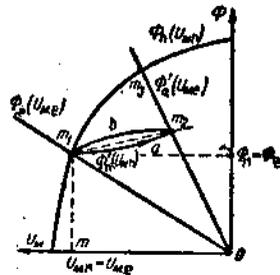


FIG. 6-16

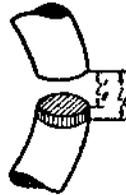


FIG. 6-17

De esta última expresión se desprende que el flujo magnético varía en función de la tensión magnética $U_{m,e}$, según una línea recta (fig.

6-16). Señalemos que la resistencia magnética del entrehierro tiene, en la práctica, un valor algo menor que el determinado por la fórmula

$$R_{m,e} = \frac{l_e}{\mu_0 S_n};$$

porque el flujo magnético se distribuye, en el entrehierro, sobre una superficie mayor que la sección transversal del núcleo ($S_e > S_n$).

Como el flujo magnético en el núcleo es igual al flujo en el entrehierro, es decir $\Phi_n = \Phi_e$ y la tensión magnética $U_{m,n} = U_{m,e}$, el flujo magnético estará determinado por la ordenada del punto m_1 de intersección de la curva $\Phi_n(U_{m,n})$ y de la recta $\Phi_e = \frac{U_{m,e}}{R_{m,e}}$ (fig. 6-16).

Bajando desde el punto m_1 una perpendicular al eje de las abscisas, obtendremos el segmento Om que nos da la tensión magnética entre los puntos a y b .

Determinemos el flujo magnético en el entrehierro para el caso en que, una vez imantado el núcleo de acero, la longitud del entrehierro se reduzca introduciendo un disco de acero (fig. 6-17) de sección S_n y de permeabilidad magnética tan grande que su reluctancia se pueda despreciar.

Disminuyendo la longitud del entrehierro, disminuirá su resistencia magnética hasta $R'_{m,e} = \frac{l_e}{\mu_0 S_n}$.

La variación del flujo magnético en función de la tensión $U_{m,e}$ estará representada por la recta $\Phi_e = \frac{U_{m,e}}{R'_{m,e}}$ cuyo ángulo con el eje de

las abscisas será mayor que el formado por la recta $\Phi_e = \frac{U_{m,e}}{R_{m,e}}$ (fig. 6-16). Al mismo tiempo, el flujo Φ_n en el núcleo de acero crecerá al variar la tensión magnética $U_{m,n}$, no según la curva de desimantación sino según la curva m_1am_2 de un ciclo singular $\Phi_n(U_{m,n})$. Reemplazando la curva m_1am_2 por una recta, la m_1m_2 , su punto de intersección m_2 con la $\Phi_e = \frac{U_{m,e}}{R'_{m,e}}$ determina, precisamente, el valor buscado del flujo Φ_e en el entrehierro.

Si se imantara el núcleo una vez introducido el disco de acero, entonces el flujo magnético sería notablemente mayor y estaría determinado por la ordenada del punto m_3 . Al extraer el disco del entrehierro, el núcleo se desimantará y el flujo disminuirá hasta llegar al valor de la ordenada del punto m_1 . Si se introduce nuevamente el disco en el entrehierro, el flujo magnético crecerá sólo hasta alcanzar el valor de la ordenada del punto m_2 .

En el gráfico de la figura 6-16, se puede apreciar la influencia de los distintos factores sobre el flujo magnético. En particular, aumen-



tando la longitud del imán y utilizando un material de una mayor fuerza coercitiva H_c , las abscisas de la curva $\Phi_n(U_m)$ serán relativamente más largas; aumentando la sección del imán S_n y utilizando un material con una mayor inducción remanente B_r para una misma fuerza coercitiva, crecen las ordenadas de la curva $\Phi_n(U_m)$.

Las nuevas aleaciones del país destinadas a la fabricación de imanes permanentes, elaboradas por A. S. Zaimovsky y que poseen una gran fuerza coercitiva, permiten obtener flujos considerables para pequeñas dimensiones de los imanes.

6-5. Cálculo de un circuito magnético, no homogéneo, no ramificado, formado por un imán permanente.

En la figura 6-18 está representado un circuito magnético, compuesto de un imán de longitud L_n y sección S_n y de un tramo de longitud $l + l'$ y sección S , de un material magnéticamente blando, para el cual se puede despreciar la histéresis, es decir, se puede considerar que su estado magnético queda determinado por un solo grupo de valores dados por la curva fundamental de imantación, y de un entrehierro de longitud l_c . Se quiere determinar el flujo magnético en el entrehierro una vez imantado todo el circuito hasta su saturación.

Utilizando la curva de desimantación, construyamos, como lo hemos hecho anteriormente, la función

$$\Phi_n = B_n S_n = \Phi_n(U_{m,n}),$$

donde $U_{m,n} = H_n I_n$ (fig. 6-19).

Luego sobre el mismo trazado y en la misma escala, construyamos la curva $\Phi_e(U_{m,ab})$ para la parte restante del circuito magnético, inclu-

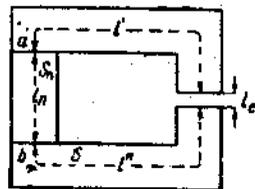


FIG. 6-18

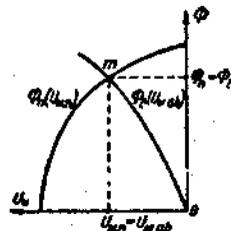


FIG. 6-19

calculamos la tensión magnética $U_{m,ab}$ para cada valor del flujo por la fórmula

$$U_{m,ab} = H(l + l') + H_c l_c,$$

es decir, obtenemos la relación $\Phi_e(U_{m,ab})$.

El flujo, en todos los tramos del circuito, tiene el mismo valor $\Phi_n = \Phi_e$, y la tensión magnética $U_{m,n} = U_{m,ab}$. Por lo tanto, el flujo magnético buscado estará determinado por la ordenada del punto m de intersección de las curvas $\Phi_e(U_{m,ab})$ y $\Phi_n(U_{m,n})$.

En conclusión y a título de ejemplo que ilustre la aplicación práctica de los imanes permanentes, examinemos el aspecto cualitativo de los fenómenos que se observan durante la rotación del inducido de un magneto (fig. 6-2) y estudiemos gráficamente los límites de variación del flujo magnético en el entrehierro. Para simplificar la construcción, supongamos iguales a cero las resistencias magnéticas del núcleo y de las piezas polares.

En la figura 6-16 se muestra la curva de desimantación de un imán permanente cuyas ordenadas están multiplicadas por la sección del imán, y las abscisas por su longitud media.

Admitamos que todo el sistema del magneto haya sido imantado hasta la saturación, estando el inducido en la posición indicada en la figura 6-2, es decir con un entrehierro mínimo. El flujo magnético Φ_2 en el inducido quedará determinado por la ordenada del punto m_2 (fig. 6-16) de intersección de la curva de desimantación con la recta Om_2 . Al girar el inducido de la posición indicada en la figura 6-2, a la posición en la cual el entrehierro se vuelve máximo, el flujo en el inducido disminuye hasta llegar a Φ_1 , determinado por la ordenada del punto m_1 de intersección de la curva de desimantación y de la recta Om_1 .

Al continuar el giro del inducido hasta la posición en la cual el entrehierro se vuelve mínimo, el flujo crece hasta alcanzar el valor Φ_2 , dado por la ordenada del punto m_2 en la curva del ciclo singular m_2am_2 (fig. 6-16). Prosiguiendo el giro hasta la posición en la que el entrehierro se vuelve máximo, el flujo magnético disminuye según la curva descendente del ciclo singular m_2bm_1 , y adquiere su valor anterior Φ_1 .

De modo que al girar el inducido, el flujo magnético varía en una magnitud igual a la diferencia de las ordenadas de los puntos m_2 y m_1 , esto es

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Haciendo girar el inducido del magneto, en las espiras del arrollamiento se inducirá una f.e.m. alterna cuyo valor se determina por el número de espiras del bobinado, por el valor máximo del flujo (Φ_2) y por la velocidad de rotación.

yendo el entrehierro. Para construir la curva nos proponemos distintos valores del flujo Φ_e , determinamos la inducción $B_e = \frac{\Phi_e}{S}$, y de la curva de imantación hallamos la intensidad del campo magnético H . Luego

SEGUNDA PARTE

PROPIEDADES Y METODOS DE CALCULO
DE LOS CIRCUITOS CON CORRIENTES
Y TENSIONES SINUSOIDALES

CAPÍTULO VII

CORRIENTES Y TENSIONES SINUSOIDALES

7-1. Corrientes alternas.

El comienzo de la aplicación en gran escala de la corriente alterna en la electrotecnia, está vinculado con la solución del problema de la producción centralizada de energía eléctrica y de su transmisión a grandes distancias. Las consideraciones económicas y las condiciones de seguridad exigen que la transmisión y la distribución de la energía se realicen a diferentes tensiones: alta tensión, para transmitir energía en líneas largas, y tensión relativamente baja para su distribución a los consumidores*.

Conozcamos las nociones fundamentales referentes a las corrientes alternas.

Se llama *corriente alterna* a aquella que varía con el tiempo. En un momento dado cualquiera la intensidad de la corriente tiene un *valor instantáneo* i . Para uno de los dos sentidos posibles de la corriente que atraviesa una sección transversal del conductor, los valores instantáneos se consideran *positivos* y, para el sentido opuesto, *negativos*. El sentido de la corriente cuyos valores instantáneos son positivos, se denomina *sentido positivo de la corriente*. La corriente está determinada si se conoce la variación de su valor instantáneo en función del tiempo $i = F(t)$ y si está indicado su sentido positivo.

Las corrientes cuyos valores se repiten a intervalos iguales de tiempo y en el mismo orden, se llaman corrientes *periódicas*. El mínimo

* En 1876, P. N. Iáblovkov ideó un aparato excepcionalmente simple, llamado transformador, por medio del cual se modifica la tensión de una corriente alterna. El empleo del transformador resolvió el problema de la obtención de las distintas tensiones necesarias para transmitir y distribuir la energía. Pero en aquel tiempo no había motores enteramente adecuados para la corriente alterna. En 1889, M. O. Dolivo-Dobrovolsky ideó un motor trifásico asincrónico de corriente alterna. Gracias a los trabajos de M. O. Dolivo-Dobrovolsky, quien elaboró todos los eslabones de la transmisión y de la distribución de la energía por medio de la corriente trifásica (cap. 14), la corriente alterna conquistó un lugar preeminente.

intervalo de tiempo después del cual se observa esa repetición se llama período T. Para la corriente periódica

$$i = F(t) = F(t + T).$$

En la figura 7-1 se da un ejemplo de la función $i = F(t)$ para la corriente periódica en una rama de cierto circuito. La flecha en el esquema indica el sentido positivo de la corriente. Las flechas de puntos señalan los sentidos reales de la corriente en la rama en el transcurso de distintos intervalos de tiempo, cuando $i > 0$ y cuando $i < 0$.

El segmento de curva comprendido entre los puntos a y b o entre O y c comprende un ciclo completo de variación de la intensidad de la corriente en un período.

La magnitud inversa al período, se llama frecuencia f. Numéricamente es igual al número de períodos en una unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{T}.$$

La unidad de frecuencia se llama hertz o ciclo por segundo. La corriente continua se puede considerar como un caso particular de la corriente periódica cuyo período de variación es infinitamente grande, es decir, cuya frecuencia es igual a cero.

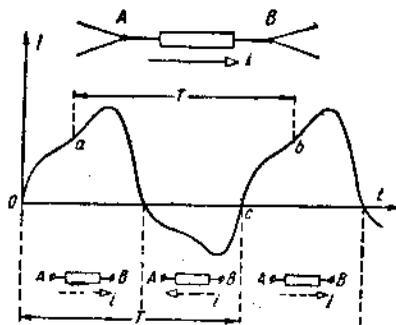


FIG. 7-1

La expresión corriente alterna se utiliza frecuentemente en un sentido restringido aplicándola a una corriente periódica tal cuya componente constante sea igual a cero, es decir

$$\frac{1}{T} \int_0^T i dt = 0.$$

El margen de las frecuencias de las corrientes alternas que se aplican en electrotecnia es muy amplio, desde decenas hasta miles de

millones de ciclos por segundo. En la electroenergética de la U.R.S.S. y de Europa, la frecuencia standard adaptada es de 50 c/s; en los Estados Unidos de América, de 60. En los distintos campos de aplicación industrial suelen utilizarse corrientes alternas de una frecuencia de 10 a $50 \cdot 10^6$ c/s. En la radiotecnica se emplean frecuencias hasta de $3 \cdot 10^{10}$ c/s.

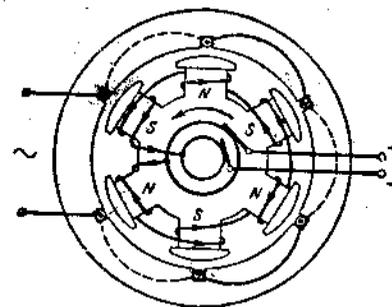
Todas las definiciones dadas más arriba para las corrientes y las nuevas que se introduzcan en lo sucesivo, son aplicables a las tensiones, a las f.e.m., a los flujos magnéticos y a otras magnitudes eléctricas y magnéticas cualesquiera que varían con el tiempo. Sólo se imponen algunas aclaraciones en lo que se refiere al signo de las tensiones y f.e.m. alternas.

La tensión alterna entre dos puntos A y B, que se determina sobre el trayecto l en cualquier sentido de A hacia B, o de B hacia A, periódicamente varía de signo. Además, si en un instante dado, $u_{AB} > 0$, en ese mismo instante la tensión $u_{BA} < 0$. Por consiguiente, si u_{AB} se determina como una cierta función de tiempo $F(t)$, esto es, $u_{AB} = F(t)$, entonces u_{BA} queda determinada por la misma función de tiempo pero de signo contrario, es decir, $u_{BA} = -F(t)$. Convendremos en llamar sentido positivo de la tensión aquel sentido para el cual la función que determina la tensión, toma valores positivos. De manera análoga se introduce la noción del sentido positivo de la f.e.m.

Son objeto de la más amplia aplicación en la electroenergética las corrientes armónicas o sinusoidales simples, o sea las que son funciones sinusoidales del tiempo. Esto se debe a que en las corrientes no sinusoidales pueden surgir fenómenos indeseables tales como: un incremento en la pérdida de energía, la aparición de tensiones considerables en distintos tramos del circuito e influencias perjudiciales para el servicio de las comunicaciones eléctricas.

7-2. Nociones sobre los generadores de corriente alterna.

Examinemos la estructura de los generadores de corriente alterna que se utilizan en la electroenergética. El generador consta de una parte fija, el estator, y de una parte móvil, el rotor. En el rotor se disponen



generalmente los electroimanes (fig. 7-2). Su arrollamiento de excitación es alimentado a través de anillos y escobillas, por una fuente de corriente continua. En las ranuras del estator, armado con chapas de acero, se alojan los arrollamientos del estator. Están unidos entre sí en serie, en la parte anterior y posterior del estator alternativamente (esas conexiones están representadas con líneas llenas y de puntos respectivamente).

La fuerza electromotriz inducida en un conductor del arrollamiento del estator es

$$e = Blv.$$

donde B — es la inducción magnética del campo que se mueve respecto al conductor;

l — la longitud activa del conductor;

v — la velocidad de desplazamiento del campo magnético respecto al conductor.

Por cuanto l y v son constantes, la ley de variación de e la determina la variación de B .

Para obtener una f.e.m. sinusoidal que es a lo que siempre se tiende, es necesario que la distribución de la inducción magnética en la periferia del estator sea próxima a la sinusoidal.

En una revolución del rotor, se producen p ciclos completos de variación de la f.e.m. siendo p el número de polos. Si el rotor da n revoluciones por minuto, resultan pn períodos en un minuto y por consiguiente, la frecuencia de la f.e.m. será:

$$f = \frac{pn}{60}$$

Para obtener $f = 50$ c/s, los generadores con un par de polos deben dar 3 000 rev/min, y con dos pares de polos 1 500 rev/min. Con velocidades de rotación tan grandes los rotores se hacen sin polos salientes a fin de asegurar su resistencia mecánica. Más esencialmente se distinguen del generador considerado los generadores electromecánicos de alta frecuencia. En la actualidad estos se fabrican para frecuencias de 800 a 8 000 c/s y se utilizan a la par de los generadores electrónicos en las instalaciones electrotérmicas. Corrientes alternas de frecuencias más elevadas se obtienen exclusivamente en los generadores electrónicos.

7-3. Corriente sinusoidal.

El valor instantáneo de la corriente sinusoidal se determina por la expresión:

$$i = I_m \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} t + \psi \right) \quad (7-1)$$

donde I_m es la intensidad máxima o *amplitud* de la corriente. El

argumento del seno de $\frac{2\pi}{T} t + \psi$ representa la etapa o fase de la variación armónica de la corriente y se denomina por ello *ángulo de fase* o simplemente *fase*. La magnitud ψ representa el ángulo de fase en el momento inicial ($t = 0$) y se llama por lo tanto *ángulo inicial de fase* o más brevemente *fase inicial*. El ángulo de fase crece continuamente con el tiempo. Cuando el ángulo de fase ha aumentado en un valor 2π o en un múltiplo de 2π , todo el ciclo se repite. Por lo tanto, cuando se habla de un ángulo de fase para un instante cualquiera, generalmente se descuenta un número entero de 2π de modo que el valor del ángulo de fase se encuentre entre los límites $\pm \pi$ o entre 0 y 2π . En un intervalo igual al período T , el ángulo de fase aumenta en 2π . La magnitud $\frac{2\pi}{T}$ mide la velocidad de variación del ángulo de fase y se designa con ω . Tomando en cuenta que $f = \frac{1}{T}$, se puede escribir:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \quad (7-2)$$

La magnitud ω , llamada frecuencia angular (o pulsación) se mide por el número de radianes en que aumenta el ángulo de fase en un segundo. Así, por ejemplo, para $f = 50$ c/s tenemos $\omega = 314$ rad/seg. Introduciendo el símbolo de la pulsación ω en la (7-1), tendremos:

$$i = I_m \operatorname{sen} (\omega t + \psi).$$

En la figura 7-3 se dan los gráficos de corrientes sinusoidales que tienen igual frecuencia y distintas amplitudes y fases iniciales:

$$i_1 = I_{1m} \operatorname{sen} (\omega t + \psi_1)$$

$$i_2 = I_{2m} \operatorname{sen} (\omega t + \psi_2).$$

Sobre el eje de las abscisas se llevan los tiempos t o la magnitud proporcional al tiempo ωt .

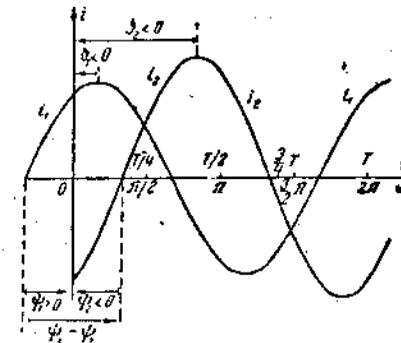


FIG. 7-3

El ángulo de fase inicial se cuenta siempre desde el momento correspondiente al principio de la senoide (el valor nulo de la senoide en su transición de los valores negativos a los positivos) hasta el momento en que se empiezan a contar los tiempos (origen de las coordenadas). Para $\psi_1 > 0$, el origen de la senoide está desplazado a la izquierda (i_1), y para $\psi_2 < 0$, a la derecha (i_2) a contar desde el origen de las coordenadas ($t = 0$). El valor instantáneo de la corriente sinusoidal puede representarse también en forma de una función cosinusoidal del tiempo:

$$i = I_m \cos(\omega t + \vartheta),$$

donde $\vartheta = \psi - \frac{1}{2}$.

Si varias funciones sinusoidales, de igual frecuencia, no pasan simultáneamente por sus valores máximos o nulos, se dice que están desplazadas de fase. El desplazamiento de fase se mide por la diferencia de los ángulos de fase que evidentemente es igual a la diferencia de los ángulos iniciales de fase. En la figura 7-3, por ejemplo, $\psi_1 - \psi_2 > 0$, es decir la corriente i_2 adelanta en fase a la corriente i_1 de un ángulo $\psi_1 - \psi_2$ o también, lo que es lo mismo, la corriente i_2 retrasa respecto a la corriente i_1 de un ángulo $\psi_1 - \psi_2$.

Si las funciones sinusoidales de una misma frecuencia tienen fases iniciales iguales, entonces se dice que *están* (o concuerdan) *en fase*; si la diferencia de sus fases es igual a $\pm \pi$, se dice que *están en oposición de fase* y finalmente si su diferencia es igual a $\pm \frac{\pi}{2}$, *están en cuadratura*.

7-4. Los valores eficaces de la corriente, de la f.e.m. y de la tensión.

La fuerza mecánica de interacción de dos conductores, por los cuales fluye una misma corriente, es proporcional al cuadrado del valor instantáneo de la corriente. La acción térmica de la corriente es también proporcional al cuadrado de la intensidad de la corriente. Por lo tanto, para poder juzgar de la magnitud de la corriente periódica, se introduce el concepto del valor medio cuadrático de la intensidad en un período y que se llama *valor eficaz de la corriente alterna*.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}. \quad (7-3)$$

En un período de la corriente alterna, se libera en un conductor de resistencia r , una energía térmica igual a:

$$\int_0^T r i^2 dt = rT \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = rI^2 T.$$

De aquí se deduce que el valor eficaz de la corriente alterna es igual numéricamente a la intensidad de una corriente continua tal que, en un intervalo de tiempo igual a un período, libera en el conductor una cantidad de calor igual a la que libera la corriente alterna.

Establezcamos la relación entre la intensidad eficaz I y la amplitud I_m de la corriente sinusoidal:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \psi) dt = \\ &= \frac{I_m^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t + 2\psi)] dt = \frac{I_m^2}{2}. \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$I_{\text{e.f.}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (7-4)$$

Los valores cuadráticos medios de las otras magnitudes periódicas cualesquiera, en un período, también se llaman valores eficaces de dichas magnitudes. Así por ejemplo, los valores eficaces de las f.e.m. y de las tensiones son:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}, \\ U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}. \end{aligned}$$

Las f.e.m. y tensiones sinusoidales eficaces son

$$E_{\text{e.f.}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad U_{\text{e.f.}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Cuando se habla de las tensiones y corrientes periódicas, se sobreentiende generalmente sus valores eficaces y en honor a la brevedad se dice simplemente tensión de tantos volt e intensidad de tantos amperes. En la electrotecnia suelen presentarse tensiones e intensidades tanto muy pequeñas como muy grandes. La tensión, en los bornes de entrada de un receptor de radio de alta calidad, con la cual aun es posible recibir señales radiales, tiene un valor eficaz del orden de los microvolt. La tensión entre los conductores de las líneas de transmisión Kuibishev-Moscú es de 400 kV. En los hornos eléctricos de fundición se necesitan intensidades del orden de decenas de miles de amperes.

7-5. Representación de las funciones sinusoidales del tiempo por vectores y números complejos.

Se facilita el cálculo de los circuitos de corriente alterna, representando las magnitudes que varían sinusoidalmente en el tiempo, por medio de vectores o de números complejos. Sea una cierta magnitud (intensidad, tensión, flujo magnético, etc.) $v = V_m \text{sen}(\omega t + \psi)$. • To-

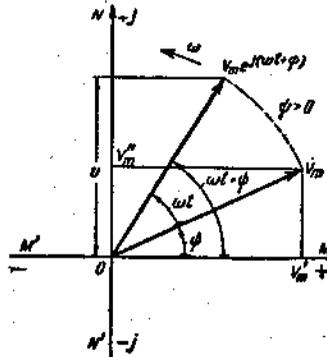


FIG. 7-4

memos un sistema de ejes ortogonales MON (fig. 7-4). Tracemos el vector \dot{V}_m , cuya longitud, en escala arbitraria, es igual a la amplitud V_m y que forma un ángulo ψ con el eje horizontal OM .

Los ángulos ψ positivos se toman en el sentido contrario y los negativos en el mismo sentido del movimiento de las agujas del reloj. Imaginémonos que el vector \dot{V}_m , a partir del momento $t = 0$, gira alrededor del origen de las coordenadas O , en el sentido contrario al de las agujas del reloj con una velocidad angular constante igual a la frecuencia angular ω . Al cabo de un intervalo de tiempo t , el vector \dot{V}_m formará con el eje OM un ángulo $\omega t + \psi$. Su proyección sobre el eje $N'N$ es igual, en la escala elegida, al valor instantáneo de la magnitud considerada.

Los valores instantáneos, como proyecciones del vector sobre el eje $N'N$, se pueden obtener también de otra manera y es, dejando el vector \dot{V}_m fijo y haciendo girar, desde el momento $t = 0$, el eje $N'N$ en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, con una velocidad angular ω . En tal caso, el eje giratorio $N'N$ se designa con el nombre de *línea de tiempo*.

De modo que entre el valor instantáneo v y el vector \dot{V}_m se puede establecer una relación uniforme. \dot{V}_m es el vector *representativo de la función sinusoidal del tiempo* o simplemente vector de la magnitud v . Así, por ejemplo, hay vectores de tensión, de f.e.m., de intensidad, del

flujo magnético, etc. Tales denominaciones son expresiones abreviadas convencionales y los vectores mencionados tienen un significado distinto del de los vectores que determinan los valores y las direcciones de las magnitudes físicas en el espacio, tales como los vectores de la velocidad, de la fuerza, de la aceleración, de la intensidad del campo eléctrico, etc.

Los vectores que representan las funciones sinusoidales del tiempo, se designan con mayúsculas con un punto arriba. El conjunto de los vectores que representan las funciones consideradas, constituye el *diagrama vectorial*.

Si se considera a MON como un plano complejo y a los ejes MM' y NN' como ejes de magnitudes reales e imaginarias respectivamente, el vector \dot{V}_m corresponderá a un número complejo cuyo módulo es V_m y cuyo argumento es el ángulo ψ . Ese número complejo \dot{V}_m se llama *amplitud compleja* de la magnitud considerada.

La amplitud compleja se escribe generalmente en una de las dos formas siguientes:

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\psi} = V_m \angle \psi, \quad (7-5)$$

donde $j = \sqrt{-1}$.

La forma $V_m e^{j\psi}$ se llama exponencial, y la forma $V_m \angle \psi$, polar.

A la amplitud compleja \dot{V}_m se le puede dar la forma trigonométrica y algebraica:

$$\dot{V}_m = V_m (\cos \psi + j \sin \psi) = V_m' + jV_m'' \quad (7-6)$$

Si el vector \dot{V}_m , a partir del instante $t = 0$, gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj con una velocidad angular ω , le corresponderá la siguiente función compleja del tiempo.

$$V_m e^{j(\omega t + \psi)} = V_m \cos(\omega t + \psi) + jV_m \sin(\omega t + \psi).$$

El valor de la parte imaginaria de esa función, sin el símbolo j , es igual a la magnitud v considerada que varía sinusoidalmente.

De modo que entre la magnitud v y su *representación*, la amplitud compleja, hay una relación uniforme que se determina por la siguiente igualdad:

$$v = \text{Im} [V_m e^{j(\omega t + \psi)}] = \text{Im} [V_m e^{j\psi} e^{j\omega t}] = \text{Im} [\dot{V}_m e^{j\omega t}], \quad (7-7)$$

donde el símbolo Im indica que de la función compleja del tiempo anotada entre corchetes, sólo se toma el valor de la parte imaginaria sin considerar j .

Observemos que las magnitudes complejas que representan a las funciones sinusoidales de tiempo, se designan con mayúsculas marcadas con un punto arriba. Todas las magnitudes complejas restantes que se encuentran al analizar los circuitos de corriente sinusoidal, se acostumbra designar con mayúscula sin puntos (párrafos 8-6, 8-7).

Si se representa la magnitud armónicamente variable en forma de una función sinusoidal del tiempo, su valor instantáneo será

$$v = V_m \cos(\omega t + \vartheta) = \text{Re} [V_m \cos(\omega t + \vartheta) + jV_m \sin(\omega t + \vartheta)] = \\ = \text{Re} [V_m e^{j(\omega t + \vartheta)}] = \text{Re} [\dot{V}_m e^{j\omega t}],$$

donde el símbolo Re designa la parte real de la función compleja del tiempo anotada entre corchetes.

En ese caso, v se determina gráficamente como una proyección del vector giratorio $\dot{V}_m e^{j\omega t}$ sobre el eje de las magnitudes reales.

El método de cálculo de los circuitos de corriente sinusoidal, basado en la representación de las funciones armónicas de tiempo por números complejos, se llama *método de las magnitudes complejas*, *método de las amplitudes complejas* o *método simbólico*. Esta última designación estriba en el hecho de que los números complejos son representaciones, "símbolos" de las funciones sinusoidales de tiempo.

7-6. Suma de las funciones sinusoidales del tiempo de igual frecuencia.

En el estudio de los circuitos de corriente sinusoidal suele presentarse la necesidad de sumar funciones armónicas del tiempo de igual frecuencia, pero de amplitudes diferentes y con fases iniciales distintas. Vamos a exponer dos sencillos métodos que nos permitirán resolver este problema, el gráfico y el analítico.

Sea hallar la suma de

$$v_1 = V_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) \quad \text{y} \quad v_2 = V_{2m} \sin(\omega t + \psi_2).$$

Escribamos:

$$v = v_1 + v_2 = \text{Im} [\dot{V}_{1m} e^{j\omega t}] + \text{Im} [\dot{V}_{2m} e^{j\omega t}].$$

La expresión se puede considerar como la suma de las proyecciones sobre el eje $N'N$ de los vectores giratorios

$$\dot{V}_{1m} e^{j\omega t} \quad \text{y} \quad \dot{V}_{2m} e^{j\omega t},$$

donde

$$\dot{V}_{1m} = V_{1m} e^{j\psi_1} \quad \text{y} \quad \dot{V}_{2m} = V_{2m} e^{j\psi_2}$$

(fig. 7-5). El diagrama vectorial fué construido para el caso en que

$$\psi_1 > 0 \quad \text{y} \quad \psi_2 < 0.$$

El vector \dot{V}_{1m} desplazado respecto al vector \dot{V}_{2m} de un ángulo $\psi_1 - \psi_2$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj (sentido de la rotación de los vectores) adelanta al vector \dot{V}_{2m} de un ángulo $\psi_1 - \psi_2$. Correspondientemente el vector \dot{V}_{2m} retrasa con respecto al vector \dot{V}_{1m} de un ángulo $\psi_1 - \psi_2$.

La suma de las partes imaginarias de las magnitudes complejas es igual a la parte imaginaria de la suma de las magnitudes complejas o, también, la suma algebraica de las proyecciones de los vectores

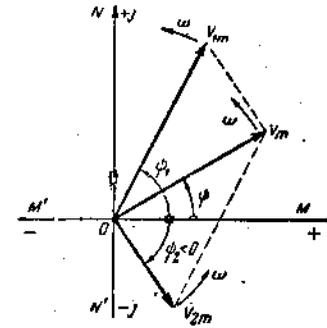


FIG. 7-5

sobre el eje de las magnitudes imaginarias es igual a la proyección, sobre el mismo eje, del vector resultante de sumar geoméricamente los vectores

$$v = \text{Im} [\dot{V}_{1m} e^{j\omega t}] + \text{Im} [\dot{V}_{2m} e^{j\omega t}] = \text{Im} [\dot{V}_{1m} e^{j\omega t} + \dot{V}_{2m} e^{j\omega t}].$$

Como ambos vectores giratorios tienen una velocidad angular ω igual, entonces el vector suma, girará uniformemente con la misma velocidad angular y por consiguiente, su proyección sobre el eje $N'N$ será también una función sinusoidal del tiempo. Esto se refleja en las transformaciones ulteriores:

$$v = \text{Im} [\dot{V}_{1m} e^{j\omega t} + \dot{V}_{2m} e^{j\omega t}] = \text{Im} [(\dot{V}_{1m} + \dot{V}_{2m}) e^{j\omega t}] = \\ = \text{Im} [\dot{V}_m e^{j\omega t}] = V_m \sin(\omega t + \psi),$$

donde

$$\dot{V}_m = V_m e^{j\psi} = \dot{V}_{1m} + \dot{V}_{2m}.$$

De modo que el problema de sumar funciones sinusoidales del tiempo, de igual frecuencia, se reduce a determinar la amplitud V_m y la fase inicial ψ de la función suma v .

Gráficamente V_m y ψ pueden hallarse en el diagrama vectorial sumando geoméricamente los vectores \dot{V}_{1m} y \dot{V}_{2m} .

Análiticamente se pueden determinar V_m y ψ sumando las amplitudes complejas \dot{V}_{1m} y \dot{V}_{2m} . Para ello, las amplitudes complejas sumandos se anotan en la forma algebraica: $\dot{V}_{1m} = V'_{1m} + jV''_{1m}$ y $\dot{V}_{2m} = V'_{2m} + jV''_{2m}$ y luego se opera:

$$\dot{V}_m = \dot{V}_{1m} + \dot{V}_{2m} = V'_{1m} + V'_{2m} + j(V''_{1m} + V''_{2m}) = V'_m + jV''_m;$$

donde

$$V_m = V_{1m} + V_{2m} \quad \text{y} \quad V_m'' = V_{1m}'' + V_{2m}''$$

De aquí hallamos

$$V_m = \sqrt{V_{1m}^2 + V_{2m}^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{V_m''}{V_m}$$

Dado que $\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} (\psi \pm \pi)$ resulta que para determinar ψ hay que conocer también en qué cuadrante se encuentra el vector \dot{V}_m . Esto se establece fácilmente de acuerdo a los signos de las partes real e imaginaria de \dot{V}_m .

Por razones de comodidad, en los cálculos se expresa la fase inicial ψ , no en radianes sino en grados.

Los métodos examinados pueden ser aplicados para sumar cualquier número de funciones sinusoidales de tiempo, de igual frecuencia.

Generalmente, en los cálculos de los circuitos de corriente sinusoidal, interesan solamente los valores eficaces de las funciones sinusoidales y sus diferencias de fase relativas. En esos casos, al construir los diagramas vectoriales, se respetan exactamente las diferencias de los ángulos de fase entre los vectores, mientras que su posición respecto a los ejes de las magnitudes reales y de las imaginarias puede ser arbitraria, de allí que los ejes no se indiquen. Además, las longitudes de los vectores se toman iguales no a las amplitudes sino a los valores eficaces de las magnitudes consideradas.

Correspondientemente, en el cálculo analítico, los ángulos iniciales de fase de las funciones consideradas pueden modificarse en una misma cantidad, de tal modo, por ejemplo, que el ángulo de fase inicial de una de las funciones consideradas sea igual a cero. En lugar de las amplitudes complejas se toman generalmente valores $\sqrt{2}$ -veces menores, los así llamados *valores eficaces complejos*:

$$\dot{V} = \frac{\dot{V}_m}{\sqrt{2}}$$

y para abreviar se suele nombrar directamente las magnitudes. Así se dice, por ejemplo, *intensidad compleja*, *tensión compleja*, etc.

CAPÍTULO VIII

NOCIONES FUNDAMENTALES ACERCA DE LOS CIRCUITOS DE CORRIENTE SINUSOIDAL

8-1. El circuito eléctrico y su esquema.

La corriente eléctrica está indisolublemente ligada con los campos magnético y eléctrico. En la corriente alterna esos campos varían con el tiempo. El campo magnético, al variar, induce una f.e.m.; la variación del campo eléctrico es acompañada por una variación de cargas en los conductores. En los conductores, y a menudo en el medio ambiente que los circunda, la energía electromagnética se transforma en calor. Cierta cantidad de energía electromagnética es radiada. En un circuito eléctrico no se puede destacar ningún tramo que no esté vinculado con los fenómenos enumerados.

En una serie de instalaciones, la energía electromagnética se transforma también en otras formas de energía, además de la térmica (mecánica, química, etc.).

Para simplificar el estudio de todos los procesos enumerados, se sustituye el circuito eléctrico real por un esquema de cálculo o circuito idealizado, compuesto por elementos distintos, cada uno de los cuales caracteriza uno de dichos fenómenos.

Se introducen elementos que caracterizan sólo la transformación de energía electromagnética en calor; tales son las resistencias r . Esos elementos se emplean igualmente para calcular la transformación de la energía electromagnética en mecánica y para calcular la energía radiada.

Se introducen elementos que caracterizan sólo la presencia del campo magnético; tales son las inductancias L .

Finalmente, están los elementos que sólo caracterizan la presencia del campo eléctrico y son las capacidades C .

Las denominaciones de los elementos del esquema coinciden con las correspondientes a las propiedades del circuito y a sus parámetros que caracterizan cuantitativamente esas propiedades. La inductancia mutua entre los elementos de un circuito real queda expresada en el esquema indicando su presencia entre las inductancias propias.

Las fuentes reales de energía en un circuito idealizado se representan por esquemas que contienen fuentes de tensión o de intensidad.

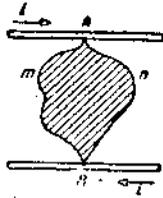


FIG. 8-1

Se considera que los conductores, que unen los distintos elementos de un circuito idealizado, carecen de resistencia, de inductancia y de capacidad.

En los conductores y en los nudos de un circuito idealizado no pueden acumularse cargas (los únicos acumuladores de cargas son las capacidades). Por esta razón, para un nudo cualquiera de un circuito tal, son válidas las leyes de Kirchhoff.

La suma algebraica de las intensidades instantáneas en un nudo es igual a cero.

La tensión entre dos puntos de un circuito real de corriente alterna depende en general del trayecto a lo largo del cual aquella se determina. Veamos en qué se distinguen las tensiones entre dos puntos A y B de dos conductores de cualquier circuito de corriente alterna, determinadas según dos trayectos distintos A_mB y A_nB (fig. 8-1).

Según la ley de la inducción electromagnética, la integral lineal de la intensidad del campo eléctrico a lo largo de una malla A_mB_nA es igual a la f.e.m. inducida en dicha malla por el flujo magnético variable, que atraviesa la superficie de esa malla.

$$\oint_{A_mB_nA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{A_mB} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{B_nA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = e = -\frac{d\Phi}{dt},$$

donde

$$\int_{A_mB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_{A_mB}, \quad \int_{B_nA} \mathbf{E} d\mathbf{l} = U_{B_nA} = -U_{A_nB},$$

o también

$$U_{A_mB} - U_{A_nB} = -\frac{d\Phi}{dt} = e.$$

Por consiguiente, las tensiones entre dos puntos, determinadas sobre dos trayectos distintos, se distinguen una de la otra en una cantidad igual a la f.e.m. inducida en la malla, formada por esos dos trayectos.

Las tensiones determinadas a lo largo de trayectos distintos, serán

iguales, a condición de que los contornos cerrados formados por esos dos trayectos no sean atravesados por un flujo magnético variable.

En un circuito idealizado, se considera que el campo magnético está totalmente concentrado en las inductancias. Se admite que cualesquiera sean los trayectos a lo largo de los cuales se determinan las tensiones entre dos puntos de un circuito idealizado, ellos se encuentran íntegramente fuera de los elementos de éste y, por consiguiente, fuera del campo magnético variable. En tales condiciones, la tensión no dependerá del trayecto; los distintos puntos del esquema se podrán caracterizar por los potenciales y considerar la tensión como una diferencia de potenciales. De aquí, se dice que los circuitos idealizados son potenciales. La variación del potencial en cualquier malla de un circuito de este tipo es igual a cero. Por lo tanto es exacta la siguiente formulación de la segunda ley de Kirchhoff:

La suma algebraica de los valores instantáneos de las tensiones en todos los elementos de cualquier malla de un esquema es igual a cero, o, dicho de otro modo, la suma algebraica de los valores instantáneos de las f.e.m. de todas las fuentes de tensión, en cualquier malla de un esquema, es igual a la suma algebraica de los valores instantáneos de las tensiones en todos los elementos restantes de la misma malla.

El paso de un circuito real a un esquema de cálculo siempre está vinculado a una serie de convenciones que deben permitir eliminar los factores secundarios que no son esenciales para los fenómenos considerados.

Cuando el esquema obtenido tiene un número limitado (finito) de elementos, se dice que el circuito se estudia con parámetros concentrados. Cuando hay que utilizar un esquema con un número ilimitadamente grande (infinito) de elementos, se dice que el circuito tiene parámetros distribuidos.

La solución del problema en lo que se refiere a si un circuito real dado debe considerarse como un circuito con parámetros concentrados o distribuidos, depende del problema planteado y de la frecuencia de la corriente sinusoidal. Veamos algunos ejemplos. Si hay que establecer la relación entre la intensidad y la tensión en los bornes de una bobina, se la representa por un esquema con parámetros concentrados. Ese esquema contiene una resistencia y una inductancia; para una alta frecuencia hay que introducir la capacidad (más en detalle ver parágrafo 8-12). Si en cambio se trata de la distribución de la tensión en las espiras de un arrollamiento de la misma bobina, con una corriente de alta frecuencia, resulta necesario utilizar un esquema complejo con parámetros distribuidos. Una línea bifilar cuya longitud es mucho menor que la de las ondas electromagnéticas relacionadas con la corriente de la línea, puede representarse como un circuito con parámetros concentrados. Si la longitud de la línea es commensurable con la de las ondas electromagnéticas, se impone la necesidad de estudiarla como un circuito con parámetros distribuidos.

En los casos en que todas las dimensiones del circuito real, y no



sólo su longitud, son conmensurables con la longitud de las ondas electromagnéticas, la composición del esquema se vuelve dificultosa y los cálculos tienen que efectuarse no sobre la base de los circuitos eléctricos sino según la teoría del campo electromagnético.

En esta sección se estudian los circuitos lineales, esto es, circuitos, resistencias, inductancias y capacidades tales que no dependen de la magnitud de la intensidad y de la tensión.

Se supone que las fuentes de energía tienen f.e.m. sinusoidales. Si el circuito tiene varias fuentes de energía, se estudian sólo aquellos casos en que las frecuencias de todas las f.e.m. son iguales. Señalemos que así sucede en un régimen normal en los circuitos eléctricos de los sistemas energéticos.

Por fin, se estudian aquí, los llamados estados de régimen de los circuitos que se establecen al cabo de un cierto intervalo de tiempo (generalmente desde fracciones de segundo hasta varios segundos) una vez que han terminado todas las operaciones de conexión y desconexión en el circuito. Una vez alcanzado el estado de régimen y cumplidas las condiciones antes enumeradas —linealidad del circuito, f.e.m. de las fuentes de alimentación, sinusoidales y de igual frecuencia— las corrientes en todas las ramas serán también sinusoidales y tendrán la misma frecuencia que las f.e.m. de las fuentes de energía. Asimismo serán sinusoidales y tendrán la misma frecuencia las tensiones de cualquier tramo del circuito. Ese enunciado que se toma aquí como un hecho experimental queda correspondientemente fundamentado en el estudio de los procesos transitorios.

Para estudiar las propiedades de los circuitos con intensidades y tensiones sinusoidales es natural que empecemos por estudiar las propiedades de los elementos que forman parte de cualquier esquema de un circuito real.

Para no complicar el texto con una superabundancia de conceptos nuevos, los elementos de circuitos con inducción mutua se estudiarán más adelante.

En lo sucesivo, cuando por el contenido mismo del texto se vea claramente de qué circuito se trata, de uno real o de uno idealizado, se empleará para abreviar el término circuito sin aclaraciones.

8-2. Corriente sinusoidal en la resistencia.

En cualquier instante, la tensión en los bornes de una resistencia y la intensidad de la corriente en dicha resistencia (fig 8-2, a) están ligadas por la ley de Ohm.

$$u = r i \quad \text{o también} \quad i = \frac{u}{r} \quad (8-1)$$

Para la tensión sinusoidal dada $u = U_m \sin \omega t$, la intensidad será:

$$i = \frac{U_m}{r} \sin \omega t = I_m \sin \omega t;$$

donde

$$I_m = \frac{U_m}{r}$$

Como las amplitudes y los valores eficaces sólo se distinguen por el factor $\sqrt{2}$, será $I = \frac{U}{r}$. Las curvas de variación de u y de i en función del tiempo se muestran en la figura 8-2, b. La tensión y la

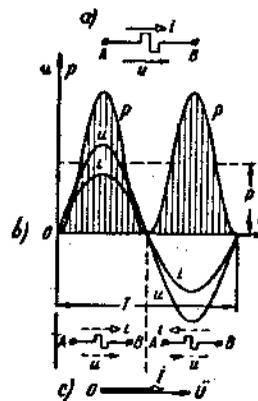


FIG. 8-2

corriente están en fase, de allí que sus vectores representativos \vec{U} e \vec{I} tienen la misma dirección (fig. 8-2, c) y los argumentos de los complejos \vec{U} e \vec{I} son iguales:

$$\vec{i} = \frac{\vec{U}}{r} \quad \text{y} \quad \vec{U} = r \vec{i} \quad (8-2)$$

La potencia instantánea que pasa a la resistencia

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = UI(1 - \cos 2\omega t), \quad (8-3)$$

varía con una frecuencia angular 2ω y oscila entre los límites 0 y $2UI$. La curva que expresa la variación de p en función del tiempo está dada en la figura 8-2, b. Allí mismo se muestra, con flechas de puntos, el sentido de la corriente y de la tensión durante cada semiperíodo. En todo momento esos sentidos coinciden, por eso es $p \geq 0$.

El valor medio de la potencia en un período se llama *potencia activa* y se designa con P . En el caso considerado, como se ve de la expresión dada para p y del gráfico, la potencia activa es $P = UI = rI^2$.

La superficie rayada limitada por la curva p y por el eje de las abscisas, corresponde a $\int_0^T p dt$, energía transformada en calor en un período.

8-3. Corriente sinusoidal en la inductancia.

La variación de la corriente i en la inductancia (fig. 8-3, a) produce una f.e.m. de autoinducción, e_L . Esta se opone, según la ley de Lenz, a la variación de la corriente. Por lo tanto, al elegir sentidos positivos iguales para i y e_L , como suele hacerse generalmente, los signos de e_L y de $\frac{di}{dt}$ siempre son contrarios y

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Para una corriente sinusoidal $i = I_m \sin \omega t$, la f.e.m. de autoinducción es

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega L I_m \cos \omega t = E_{Lm} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (8-4)$$

donde

$$E_{Lm} = \omega L I_m.$$

La f.e.m. e_L retrasa respecto a la corriente de un cuarto de período o sea de un ángulo $\frac{\pi}{2}$ y, correspondientemente, el vector \underline{E}_L retrasa de $\frac{\pi}{2}$ con respecto al vector \underline{I} (fig. 8-3, b y c). Para que la inductancia sea atravesada por una corriente alterna, en sus bornes debe existir una tensión igual y opuesta a la f.e.m. inducida.

Siendo los sentidos positivos de las tensiones y de las f.e.m. iguales, éstas serán de signo contrario:

$$u = -e_L = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (8-5)$$

donde

$$U_m = E_{Lm} = \omega L I_m.$$

Para los valores eficaces de la corriente y de la tensión, tendremos las relaciones siguientes:

$$U = \omega L I \quad \text{e} \quad I = \frac{U}{\omega L}. \quad (8-6)$$

La magnitud ωL que tiene las dimensiones de la resistencia, se llama reactancia o resistencia inductiva x_L , y es función lineal de la frecuencia. Para una amplitud invariable de la corriente, las amplitudes de la f.e.m. de autoinducción y de la tensión que la equilibra crecen proporcionalmente a la frecuencia.

La tensión en los bornes de la inductancia adelanta en fase a la intensidad de un cuarto de período, y el vector \underline{U} adelanta al vector \underline{I} de $\frac{\pi}{2}$ (fig. 8-3, b y c). El argumento del complejo \underline{U} es mayor que el

argumento del complejo \underline{I} en $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \underline{U} &= \omega L \underline{I} e^{j\pi/2} = j\omega L \underline{I}, \\ \underline{I} &= \frac{\underline{U}}{j\omega L} = -j \frac{\underline{U}}{\omega L}. \end{aligned} \right\} \quad (8-7)$$

En esas expresiones se considera que $e^{j\pi/2} = j$ y $e^{-j\pi/2} = -j$.

Examinando esas relaciones entre los complejos \underline{U} e \underline{I} como relaciones entre vectores, se puede decir que: la multiplicación o la división

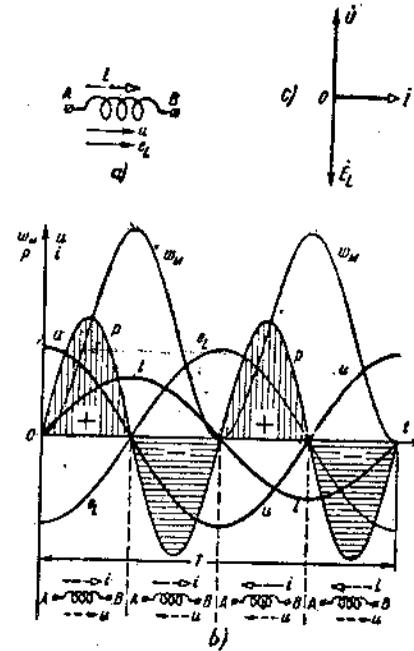


FIG. 8-3

por ωL modifica la longitud del vector; la multiplicación por $j = e^{j\pi/2}$ hace girar el vector de un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj (lo hace girar "hacia adelante"); la división por $j = e^{j\pi/2}$ o la multiplicación por $-j$ hace girar el vector de un ángulo $\frac{\pi}{2}$ en el mismo sentido del movimiento de las agujas del reloj ("hacia atrás"). De aquí que a la expresión $j = e^{j\pi/2}$ se le suele llamar operador de giro en $\frac{\pi}{2}$.

La potencia instantánea, que pasa a la inductancia

$$p = ui = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \cdot I_m \sin \omega t = \frac{U_m I_m}{2} \left[\cos \frac{\pi}{2} - \cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right] = UI \sin \omega t \quad (8-8)$$

varía sinusoidalmente con una frecuencia angular 2ω , siendo el valor medio de la potencia o la potencia activa $P = 0$.

La energía del campo magnético de la inductancia

$$w_M = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{LI^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad (8-9)$$

varía sinusoidalmente con una frecuencia angular 2ω desde 0 a LI^2 .

Está claro que la potencia instantánea p de la energía que pasa a la inductancia es igual a la velocidad del crecimiento de energía del campo magnético $\frac{dw_M}{dt}$. En efecto:

$$p = ui = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} \right) = \frac{dw_M}{dt}$$

Cuando la intensidad i crece en valor absoluto, el sentido de la f.e.m. de autoinducción e_L es opuesto al de la corriente y la tensión $u = -e_L$ coincide en sentido con la corriente (ver flechas de puntos en la fig. 8-3, b). Al mismo tiempo $p = ui > 0$, es decir que la fuente de alimentación realiza un trabajo positivo contra la f.e.m. de autoinducción y se acumula energía en el campo magnético. Al disminuir la intensidad en valor absoluto, la f.e.m. de autoinducción coincide en sentido con la corriente, mientras que el sentido de la tensión es opuesto al de la corriente. Entonces $p = ui < 0$ y la energía es devuelta del campo magnético a la fuente de alimentación. Las áreas limitadas por la curva de la potencia y el eje de las abscisas y correspondientes a la energía transferida a la inductancia (marcadas con el signo +) y a la energía devuelta a la fuente de alimentación (marcadas con el signo -) son iguales entre sí. De modo que se produce un intercambio ininterrumpido de energía entre la fuente de alimentación y el campo magnético de la inductancia.

8-4. Corriente sinusoidal en la capacidad.

Las cargas en los electrodos de un condensador ideal (capacidad) son iguales y de signo contrario $q_A = -q_B$ siendo

$$q_A = C(\varphi_A - \varphi_B) \quad \text{y} \quad q_B = C(\varphi_B - \varphi_A).$$

Para el sentido positivo de la tensión, señalado en la figura 8-4, a, q_A y u tienen signos iguales

$$q_A = Cu.$$

La intensidad en una rama con capacidad es igual a la velocidad de variación de su carga y , para el sentido positivo señalado de la corriente, el signo de la intensidad de la corriente coincide con el signo de la derivada de la carga q_A respecto al tiempo.

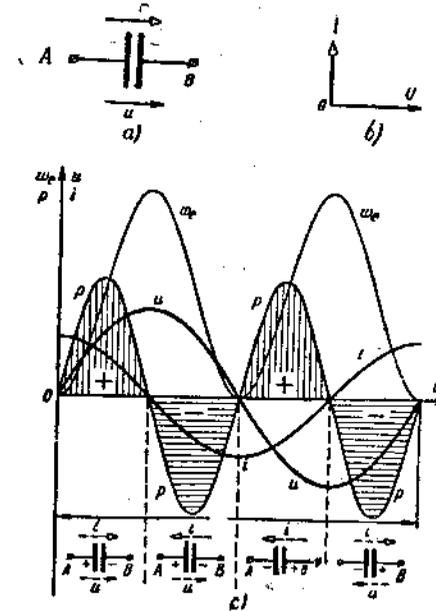


FIG. 8-4

En efecto, a un incremento de la carga q_A corresponde un valor positivo de la intensidad; a una disminución de la carga q_A , un valor negativo de la intensidad. Por lo tanto, haciendo $q_A = q$, podemos escribir

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

o también

$$u = \frac{1}{C} \int i dt.$$

Para una tensión sinusoidal $u = U_m \sin \omega t$, la intensidad es

$$i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (8-10)$$

donde

$$I_m = \omega C U_m.$$

Para los valores eficaces de la tensión y de la intensidad, tenemos las relaciones

$$I = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} \quad \text{y} \quad U = \frac{1}{\omega C} I. \quad (8-11)$$

La magnitud $\frac{1}{\omega C}$ que tiene la dimensión de la resistencia, se llama *reactancia* (o *resistencia*) *capacitiva* x_c . La reactancia capacitiva es inversamente proporcional a la frecuencia.

La intensidad i adelanta de un cuarto de período respecto a la tensión u (fig. 8-4, b). El vector \dot{I} adelanta al vector \dot{U} de $\frac{\pi}{2}$ (fig. 8-4, c).

El argumento del complejo \dot{I} es mayor que el argumento del complejo \dot{U} en $\frac{\pi}{2}$, por lo tanto

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= \omega C \dot{U} e^{j\pi/2} = j\omega C \dot{U}; \\ \dot{U} &= \frac{\dot{I}}{j\omega C} = -j \frac{\dot{I}}{\omega C}. \end{aligned} \right\} \quad (8-12)$$

La potencia instantánea que pasa a la capacidad

$$p = ui = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = UI \sin 2\omega t \quad (8-13)$$

varía sinusoidalmente con la frecuencia angular 2ω , siendo el valor medio de la potencia o sea la potencia activa $P = 0$.

La energía del campo eléctrico de la capacidad

$$w_e = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2} \sin^2 \omega t = \frac{CU^2}{2} (1 - \cos 2\omega t) \quad (8-14)$$

varía sinusoidalmente con una frecuencia angular 2ω desde 0 hasta CU^2 .

Es evidente que la potencia instantánea de la energía transferida a la capacidad es igual a la velocidad del crecimiento de energía del campo eléctrico.

Al crecer la tensión en valor absoluto, el sentido de la corriente coincide con el de la tensión (ver flechas de puntos en la fig. 8-4, b). Se produce el proceso de carga de la capacidad $p = ui > 0$, la fuente de alimentación realiza un trabajo positivo, la energía se acumula en el campo eléctrico. Al disminuir la tensión en valor absoluto, el sentido de la corriente es contrario al de la tensión, se descarga la capacidad $p = ui < 0$, la energía vuelve a la fuente de alimentación. Las áreas limitadas por la curva de la potencia y el eje de las abscisas y corres-

pondientes a la energía transferida a la capacidad y a la energía que vuelve a la fuente de alimentación, son iguales entre sí. Se realiza un intercambio incesante de energía entre la fuente de alimentación y el campo eléctrico de la capacidad.

8-5. Conexión en serie de una resistencia, una inductancia y una capacidad.

Apliquemos a los bornes del esquema (fig. 8-5) una tensión sinusoidal

$$u = U_m \sin (\omega t + \psi_u) \quad (8-15)$$

y hallemos la corriente. Basándonos en la segunda ley de Kirchhoff, tenemos

$$u_r + u_L + u_C = u \quad (8-16)$$

o también

$$ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = U_m \sin (\omega t + \psi_u). \quad (8-17)$$

Una vez alcanzado el régimen del circuito, la corriente es una función sinusoidal del tiempo de igual frecuencia que la tensión aplicada (parág. 8-1),

$$i = I_m \sin (\omega t + \psi_i) \quad (8-18)$$

y el problema de determinar la corriente se reduce a encontrar la amplitud I_m y la fase inicial ψ_i .

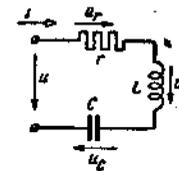


FIG. 8-5

Siendo la corriente sinusoidal, las tensiones u_r y u_L son sinusoidales (parág. 8-2 y 8-3); también lo es la tensión

$$\begin{aligned} u_C &= \frac{1}{C} \int idt = \frac{1}{C} \int I_m \sin (\omega t + \psi_i) dt = \\ &= -\frac{I_m}{\omega C} \cos (\omega t + \psi_i) + \text{const} = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t + \psi_i - \frac{\pi}{2} \right) + \text{const}, \end{aligned}$$

En efecto, la suma $u_r + u_L + u_C$ debe ser igual a la tensión sinusoidal dada u y por consiguiente no puede contener una componente constante. Por lo tanto, la constante de integración en la expresión dada

para u_c es igual a cero. A la suma de los valores instantáneos de las funciones del tiempo (8-16) le corresponde la suma geométrica de los vectores representativos o la suma algebraica de los complejos respectivos

$$\dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_c = \dot{U}. \quad (8-19)$$

Esa expresión puede considerarse como la expresión de la suma vectorial o de la suma algebraica de los complejos.

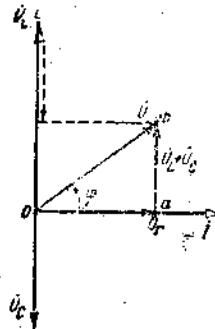


FIG. 8-6

Representemos la relación (8-19) en el diagrama vectorial (fig. 8-6) utilizando los resultados obtenidos en los párrafos 8-2, 8-3, 8-4. Tomemos una intensidad I y tracemos en una dirección arbitraria el vector \dot{I} . El vector \dot{U} , coincide en dirección con el vector \dot{I} . El vector \dot{U}_L se adelanta al vector \dot{I} de un ángulo $\frac{\pi}{2}$, y el vector \dot{U}_c retrasa respecto al vector \dot{I} de $\frac{\pi}{2}$.

Construiremos el vector de tensión \dot{U} efectuando la suma geométrica de los vectores \dot{U}_r , \dot{U}_L y \dot{U}_c .

Del triángulo rectángulo Oab tenemos:

$$U^2 = U_r^2 + (U_L - U_c)^2 = r^2 I^2 + \left(\omega L I - \frac{1}{\omega C} \right)^2,$$

de donde

$$I = \frac{U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (8-20)$$

En un caso general, si $U_L \neq U_c$ la corriente estará defasada respecto a la tensión de un ángulo φ . Convendremos en definir ese ángulo φ como la diferencia de las fases iniciales de la tensión y de la corriente $\varphi =$

$= \psi_u - \psi_i$. Será positivo cuando $\psi_u > \psi_i$, es decir cuando la corriente retrasa respecto a la tensión; y será negativo cuando $\psi_u < \psi_i$, o sea, cuando la corriente adelanta respecto a la tensión.

Del triángulo Oab tenemos:

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{U_L - U_c}{U_r} = \text{arc tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}. \quad (8-21)$$

De modo que

$$I_m = \sqrt{2} I = \frac{\sqrt{2} U}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

y $\psi_i = \psi_u - \varphi$, y la intensidad buscada

$$i = \frac{U_m}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \text{sen} (\omega t + \psi_u - \varphi). \quad (8-22)$$

Resolvamos el mismo problema utilizando la representación de las funciones sinusoidales del tiempo por números complejos. Introduzcamos los complejos que representan la tensión dada y la intensidad buscada

$$\dot{U} = U e^{j\psi_u} \quad e \quad \dot{I} = I e^{j\psi_i},$$

donde $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$ y ψ_u son las magnitudes dadas;

$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ y ψ_i son las magnitudes buscadas.

Basándonos en las (8-2), (8-7) y (8-12) escribimos la ecuación (8-19) bajo la siguiente forma:

$$r\dot{i} + j\omega L\dot{i} + \frac{\dot{i}}{j\omega C} = \dot{U}. \quad (8-23)$$

Es fácil establecer una regla formal para pasar de la ecuación de origen (8-17), cuyos términos son todos funciones sinusoidales del tiempo, a la ecuación (8-23) con los complejos representativos. Para efectuar la transición hay que reemplazar los valores instantáneos de la intensidad y de la tensión por los complejos correspondientes; en lugar de la derivada $\frac{d}{dt}$ escribir $j\omega$, y en lugar de la integral, $\frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega}$. Esa regla se basa en que la derivada y la integral de una función sinusoidal son también funciones sinusoidales, siendo sus amplitudes ω veces mayores y menores, y los ángulos de fase mayores y menores en $\frac{\pi}{2}$, que

la amplitud y el ángulo de fase respectivamente de la función inicial.

Las ecuaciones con los complejos y los diagramas vectoriales están mutuamente ligados.

Las ecuaciones pueden considerarse como la inscripción de la suma geométrica de los vectores, o, por el contrario, se puede considerar el diagrama vectorial como la representación gráfica de la ecuación dada.

De la (8-23) obtenemos la expresión de la ley de Ohm bajo la forma compleja que permite determinar la intensidad compleja buscada:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad (8-24)$$

Anotando los complejos en el numerador y en el denominador en forma exponencial, obtenemos:

$$\dot{i} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot e^{j\varphi}} = \frac{Ue^{j(\psi_u - \varphi)}}{\sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad (8-25)$$

donde

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r}$$

El módulo del complejo \dot{i} es igual a la intensidad eficaz, cuyo argumento $\psi_u - \varphi$ es igual a la fase inicial ψ_i de la corriente.

8-6. Impedancias, resistencias.

Introduzcamos una serie de magnitudes que caracterizan la corriente sinusoidal.

La relación entre la tensión compleja y la intensidad compleja se llama complejo de impedancia o *impedancia compleja*.

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{i}} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{i}_m} = ze^{j\varphi} = z \angle \varphi, \quad (8-26)$$

donde $z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$ es la relación entre el valor eficaz o la amplitud de la tensión y el valor eficaz o la amplitud de la corriente y se llama *impedancia* (o *resistencia total o aparente*). La impedancia es el módulo del complejo correspondiente. Su argumento es igual a la diferencia de los ángulos de fase de la tensión y de la corriente. La impedancia compleja se puede representar de la siguiente manera:

$$Z = ze^{j\varphi} = z \cos \varphi + jz \sin \varphi = r + jx, \quad (8-27)$$

donde $r = z \cos \varphi$: es la parte real del complejo y se llama *resistencia* (o *resistencia activa*);

$x = z \sin \varphi$: es la parte imaginaria del complejo y se llama *reactancia* (o *resistencia reactiva*).

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}; \quad \varphi = \text{arc tg} \frac{x}{r}. \quad (8-28)$$

A veces la impedancia compleja se representa por \dot{Z} .

Para el esquema representado en la figura 8-5, las expresiones (8-25) y (8-22) se pueden escribir abreviadamente de la siguiente manera:

$$\dot{i} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{ze^{j\varphi}} = \frac{U}{z} e^{j(\psi_u - \varphi)};$$

$$i = \text{Im} [\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}] = \frac{U_m}{z} \sin(\omega t + \psi_u - \varphi),$$

donde

$$Z = r + jx = r + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$x = \omega L - \frac{1}{\omega C} = x_L - x_C.$$

Las tensiones en la inductancia y en la capacidad (fig. 8-6) están en oposición de fase, por eso en la expresión dada para x , las reactancias x_L y x_C entran con signos distintos.

Las tensiones en la inductancia y en la capacidad están desplazadas de los ángulos $+\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$ respecto a la tensión en la resistencia.

Esta circunstancia queda reflejada en el hecho de que la resistencia r y las reactancias x_L y x_C entran en el complejo Z , bajo las formas $r, jx_L, -jx_C$.

Hemos de señalar que las reactancias inductiva y capacitiva se consideran como magnitudes aritméticas positivas, siendo la reactancia una magnitud algebraica y puede ser mayor o menor que cero. Para la inductancia, $x = x_L$, y para la capacidad, $x = -x_C$.

La diferencia de fase entre la tensión y la corriente depende de la relación entre la reactancia inductiva y la capacitiva. Para $x_L > x_C$ tenemos $x = x_L - x_C > 0$; la corriente retrasa en fase respecto a la tensión, $\varphi = \text{arc tg} \frac{x}{r} > 0$; para $x_L = x_C$ tenemos $x = 0$, $\varphi = 0$, $z = r$, la corriente

está en fase con la tensión, el circuito en su conjunto se comporta como una resistencia activa. Este es el caso de lo que se denomina resonancia y que se estudia detalladamente en el capítulo 10, párrafo 1. Finalmente para $x_L < x_C$ tendremos $x < 0$, $\varphi < 0$; la corriente se adelanta en fase a la tensión. Los diagramas vectoriales para las tres relaciones posibles de x_L y x_C están dados en la figura 8-7.

De modo que considerando el esquema de la figura 8-5 en su conjunto como un dipolo pasivo, se puede representarlo por uno de los tres esquemas equivalentes: para $x_L > x_C$, como una conexión en serie de una resistencia y de una inductancia (r y $x_L = x_L - x_C$); para $x_L = x_C$ como una resistencia r ; y para $x_L < x_C$ como una conexión en serie de una resistencia y de una capacidad (r y $x_C = x_C - x_L$).

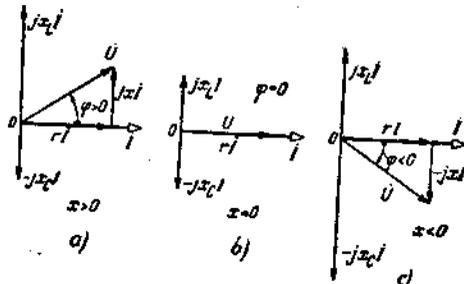


FIG. 8-7

Para una L y una C dadas, la relación entre x_L y x_C depende de la frecuencia y de ésta depende por lo tanto la forma del esquema equivalente.

Problema 8-1. Una tensión de $u = 100 \text{ sen } 5000 t$ está aplicada a un circuito formado de un condensador y de una bobina conectados en serie.

La capacidad del condensador es $C = 5 \mu\text{F}$, la resistencia de la bobina $r = 15 \Omega$ y la inductancia de la bobina $L = 12 \text{ mH}$.

Hallar las expresiones para los valores instantáneos de la corriente en el circuito y de las tensiones en el condensador y en la bobina. Considérese un condensador ideal.

Solución. El esquema de cálculo del circuito representa una conexión en serie de una resistencia, una inductancia y una capacidad (fig. 8-5):

$$x_L = \omega L = 5000 \cdot 12 \cdot 10^{-3} = 60 \Omega;$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{5000 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 40 \Omega;$$

$$x = x_L - x_C = 60 - 40 = 20 \Omega;$$

$$z = \sqrt{r^2 + x^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \Omega;$$

$$I_m = \frac{U_m}{z} = \frac{100}{25} = 4 \text{ A};$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{20}{15}; \quad \varphi = 53^\circ 08';$$

$$i = 4 \text{ sen } (5000 t - 53^\circ 08') \text{ A};$$

$$U_{Cm} = x_C I_m = 40 \cdot 4 = 160 \text{ V}.$$

La tensión en la capacidad retrasa respecto a la corriente de un ángulo de 90° , por consiguiente,

$$u_C = 160 \text{ sen } (5000 t - 143^\circ 08') \text{ V}.$$

La impedancia compleja de la bobina es

$$Z_{\text{bob.}} = r + jx_L = 15 + j60 = 61,8 \angle 75^\circ 58' \Omega.$$

La amplitud compleja de la tensión en los bornes de la bobina es

$$\dot{U}_{\text{bob.}} Z_m = Z_{\text{bob.}} \dot{I}_m = 61,8 \angle 75^\circ 58' \cdot 4 \angle -53^\circ 08' = 247,2 \angle 22^\circ 50' \text{ V};$$

y el valor instantáneo de la tensión en la bobina es

$$u_{\text{bob.}} = 247,2 \text{ sen } (5000 t + 22^\circ 50') \text{ V}.$$

Problema 8-2. En un circuito formado por un condensador y una bobina conectados en serie la intensidad de la corriente es $I = 2 \text{ A}$, su frecuencia $f = 50 \text{ c/s}$.

La tensión en los bornes del circuito $U = 100 \text{ V}$, en los bornes de la bobina $U_{\text{bob.}} = 150 \text{ V}$ y en los bornes del condensador $U_C = 200 \text{ V}$. Determinar la reactancia y la inductancia de la bobina y la capacidad del condensador. Considérese un condensador ideal.

Solución.

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 50 = 314 \text{ rad/seg};$$

$$x_C = \frac{U_C}{I} = \frac{200}{2} = 100 \Omega;$$

$$C = \frac{1}{\omega x_C} = \frac{1}{314 \cdot 100} = 31,8 \mu\text{F}.$$

Para determinar r y L de la bobina hay que recurrir al diagrama vectorial de las tensiones y de las corrientes en el circuito. Consideremos dos métodos de cálculo.

1. **Método gráfico.** Los vectores \dot{U} , $\dot{U}_{\text{bob.}}$, \dot{U}_C forman un triángulo cerrado dado que $\dot{U} = \dot{U}_{\text{bob.}} + \dot{U}_C$. Tomemos una escala m_U (V/mm) y llevemos, en esa escala y en una dirección arbitraria, el vector \dot{U}_C (fig. 8-8); su longitud es:

$$OA = \frac{U_C}{m_U} = \frac{200}{m_U} \text{ (mm)}.$$

Perpendicularmente al vector \dot{U}_C tracemos en escala arbitraria el vector \dot{I} . Luego desde el origen y el extremo del vector \dot{U}_C tracemos los arcos de circunferencias

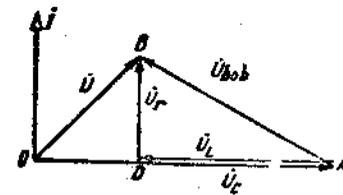


FIG. 8-8

con radios iguales en la escala elegida m_U a las tensiones U y U_{bob} . Estos arcos se cortarán en el punto B que será precisamente el de los extremos de los vectores \dot{U} y \dot{U}_{bob} .

Descompongamos el vector \dot{U}_{bob} en dos vectores componentes uno de los cuales, el \overline{DB} , coincide en dirección con el vector de intensidad \dot{I} y el otro, \overline{AD} , es perpendicular a aquél.

Es evidente que, $\overline{DB} = \dot{U}_r = r\dot{I}$ y $\overline{AD} = \dot{U}_L = jx_L\dot{I}$.

Midiendo la longitud de los segmentos DB y AD , hallamos:

$$r = \frac{DB \cdot m_U}{I} = 36,3 \Omega;$$

$$x_L = \frac{AD \cdot m_U}{I} = 65,6 \Omega;$$

$$L = \frac{x_L}{\omega} = \frac{65,6}{314} = 0,209 H.$$

2. *Método de cálculo analítico basado en el diagrama vectorial.* El diagrama vectorial (fig. 8-8) se construye cualitativamente y no en escala. Sólo es necesario para representar demostrativamente las relaciones geométricas entre sus segmentos. De los dos triángulos rectángulos OBD y BAD tenemos:

$$U_{\text{bob}}^2 - U_L^2 = U^2 - (U_C - U_L)^2$$

o también

$$150^2 - U_L^2 = 100^2 - (200 - U_L)^2;$$

de donde

$$U_L = 131,2 V; \quad U_r = \sqrt{U_{\text{bob}}^2 - U_L^2} = \sqrt{150^2 - 131,2^2} = 72,6 V;$$

$$r = \frac{U_r}{I} = \frac{72,6}{2} = 36,3 \Omega;$$

$$x_L = \frac{U_L}{I} = \frac{131,2}{2} = 65,6 \Omega.$$

8-7. Admitancias y conductancias.

Prosigamos el análisis de las magnitudes que caracterizan un circuito de corriente sinusoidal.

Se llama complejo de admitancia o *admitancia compleja* a la relación entre la corriente compleja y la tensión compleja

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{ze^{j\varphi}} = ye^{-j\varphi}; \quad (8-29)$$

donde $y = \frac{1}{z}$ es una magnitud inversa de la impedancia (o resistencia aparente) llamada *admitancia* (o *conductancia total* o *aparente*).

La admitancia compleja y la impedancia compleja son magnitudes inversas. La admitancia compleja puede ser representada en la siguiente forma:

$$Y = ye^{-j\varphi} = y \cos \varphi - jy \sin \varphi = g - jb, \quad (8-30)$$

donde $g = y \cos \varphi$: es la parte real de la admitancia compleja y se llama *conductancia* (o *conductancia activa*);

$b = y \sin \varphi$: es la parte imaginaria llamada *susceptancia* (o *conductancia reactiva*).

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{g^2 + b^2}; \\ \varphi &= \arctg \frac{b}{g}. \end{aligned} \right\} \quad (8-31)$$

Es cómodo recurrir a la noción de admitancias y conductancias al tratarse de una conexión en paralelo.

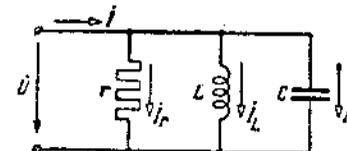


FIG. 8-9

Examinemos una conexión en paralelo de los elementos r , L y C (fig. 8-9). Sea dada la tensión

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

y se trata de determinar la corriente total del esquema.

De acuerdo a la primera ley de Kirchhoff

$$i = i_r + i_L + i_C.$$

Pasando de esa suma de funciones sinusoidales del tiempo a la suma correspondiente de los complejos representativos, tendremos:

$$\dot{I} = \dot{I}_r + \dot{I}_L + \dot{I}_C.$$

Aplicando para cada rama la ley de Ohm en la forma compleja, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{U}}{r} + \frac{\dot{U}}{j\omega L} + \frac{\dot{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = \frac{\dot{U}}{r} - j \frac{\dot{U}}{\omega L} + j\omega C \dot{U} = \\ &= \left[\frac{1}{r} - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right] \dot{U} = Y \dot{U}. \end{aligned}$$

Para el esquema examinado la admitancia compleja será

$$Y = \frac{1}{r} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - j(b_L - b_C), \quad (8-32)$$

donde

$$g = \frac{1}{r}, \quad b_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{x_L}, \quad b_C = \omega C = \frac{1}{x_C}$$

y se llaman conductancia y susceptancia inductiva y capacitiva respectivamente. La susceptancia es $b = b_L - b_C$.

Las susceptancias inductiva y capacitiva se consideran como magnitudes aritméticas (positivas), siendo la susceptancia una magnitud algebraica que puede ser mayor o menor que cero. Para la inductancia $b = b_L$ y para la capacidad, $b = -b_C$.

La corriente compleja buscada es

$$\dot{I} = Y\dot{U} = ye^{-j\psi} U e^{j\psi_n} = yU e^{j(\psi_n - \psi)},$$

donde

$$y = \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

y

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{r}}$$

El valor instantáneo de la corriente buscada será:

$$i = \text{Im} [\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}]$$

o también

$$i = yU_m \sin(\omega t + \psi_n - \varphi).$$

La diferencia de fases entre la tensión y la corriente depende de la relación entre las susceptancias inductiva y capacitiva del circuito. En la figura 8-10 se dan los diagramas vectoriales para tres casos: $b_L > b_C$; $b_L = b_C$ y $b_L < b_C$. Considerando el esquema de la figura 8-9 en su totalidad como un dipolo pasivo, se puede advertir que es equi-

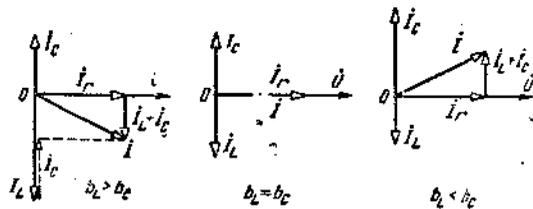


FIG. 8-10

valente en el primer caso a una conexión en paralelo de una resistencia y de una inductancia; en el segundo, a una resistencia; y en el tercero a una conexión en paralelo de una resistencia y de una capacidad. El segundo es un caso de resonancia y se estudia en los párrafos 10-3 y 10-4.

Dadas L y C , la relación entre b_L y b_C depende de la frecuencia y de ésta depende por lo tanto el aspecto del esquema equivalente.

Obsérvese que se obtuvo una expresión tan simple para Y , en que la conductancia y susceptancia de los elementos figuran como simples sumandos, debido solamente a que cada una de las ramas en paralelo contiene un solo elemento.

En un caso general

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r + jx} = \frac{r - jx}{r^2 + x^2} = \frac{r}{z^2} - j \frac{x}{z^2} = g - jb, \quad (8-33)$$

de donde

$$g = \frac{r}{z^2} \quad y \quad b = \frac{x}{z^2}. \quad (8-34)$$

Resolviendo estas expresiones respecto a r y x , obtenemos

$$r = gz^2 = \frac{g}{y^2} \quad y \quad x = bz^2 = \frac{b}{y^2}. \quad (8-35)$$

De las relaciones obtenidas vemos que b y x siempre tienen el mismo signo.

En el esquema de la figura 8-5 obtenemos para g y b expresiones bastante complejas en las que no solamente b sino también g depende de la frecuencia

$$g = \frac{r}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad y \quad b = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

En cambio para el esquema de la figura 8-9 formado por una conexión en paralelo y cuya conductancia y susceptancia se expresan en forma sencilla, resultan expresiones relativamente complejas para la resistencia y la reactancia, dependiendo la resistencia activa equivalente de la frecuencia:

$$r = \frac{g}{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} \quad y \quad x = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Pasar de la impedancia $Z = r + jx$ a la admitancia $Y = g - jb$ y viceversa, implica sustituir el esquema con elementos conectados en serie r y x por un esquema equivalente con elementos g y b conectados en paralelo y viceversa.

Las reactancias y las susceptancias de los esquemas equivalentes pueden atribuirse, según su signo, a inductancias o a capacidades equivalentes. Sin embargo, esas inductancias y capacidades equivalentes no constituyen parámetros constantes sino que dependen de la frecuencia. Esto se puede comprobar en el ejemplo de la susceptancia b mencionada anteriormente, para el esquema (fig. 8-5).

Observemos que las designaciones $Z, Y, r, x, x_L, x_C, g, b, b_L$ y b_C no sólo se aplican a las magnitudes respectivas sino también a los elementos del esquema caracterizado por esas magnitudes. La impedancia o la admitancia complejas, como elementos de esquema, se representan convencionalmente con un rectángulo (fig. 7-1). Del mismo modo se designan las reactancias y las susceptancias cuando se quiere indicar que pueden ser tanto inductivas como capacitivas.

8-8. Potencias.

La tensión y la corriente sinusoidales, a la entrada de cualquier circuito pasivo considerado como un dipolo (fig. 8-11), están defasadas por lo general, una respecto a la otra.

Sea

$$u = U_m \text{ sen } \omega t; \quad i = I_m \text{ sen } (\omega t - \varphi).$$

La potencia de entrada de la energía en el dipolo en un momento dado o sea el valor instantáneo de la potencia es:

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \text{ sen } \omega t \cdot \text{sen } (\omega t - \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos (2\omega t - \varphi). \end{aligned} \quad (8-36)$$

La potencia tiene una componente constante $UI \cos \varphi$ y otra sinusoidal cuya pulsación es dos veces mayor que la pulsación de la corriente (fig. 8-12).

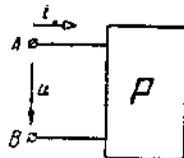


FIG. 8-11

La potencia es igual a cero en aquellos instantes en que u o i son iguales a cero. Siendo $\varphi \neq 0$, habrá durante cada período intervalos de tiempo en que u e i tengan distintos sentidos y entonces la potencia que pasa al dipolo resultará negativa o, en otras palabras, en esos intervalos la energía no pasará al circuito sino que volverá a la fuente de alimentación.

Sen ωt sen $(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)]$

Esta devolución de la energía a la fuente de alimentación es posible debido a su acumulación en los campos magnético y eléctrico de los elementos del dipolo.

La potencia activa o el valor medio de la potencia en un período (componente constante de la potencia) es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = UI \cos \varphi. \quad (8-37)$$

En el circuito pasivo no hay fuente de energía, de allí que $P \geq 0$ y por consiguiente, $\cos \varphi \geq 0$, es decir, a la entrada del dipolo pasivo es $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. El caso en que $P = 0$, $|\varphi| = \frac{\pi}{2}$ es teóricamente posible para un dipolo que no tenga resistencias y que sólo contenga inductancias y capacidades.

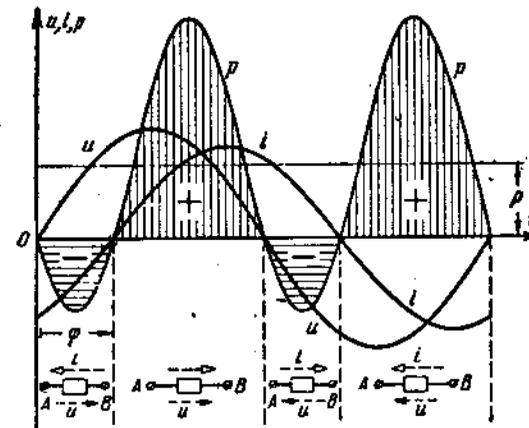


FIG. 8-12

Basándonos en la ley de conservación de la energía se puede afirmar que para cualquier circuito es válida la ley de conservación o de equilibrio tanto para los valores instantáneos de las potencias como para las potencias activas:

La suma de todas las potencias activas generadas (producidas) es igual a la suma de todas las potencias activas consumidas.

Las máquinas y los aparatos eléctricos se construyen para determinados valores de la tensión y de la corriente. Por tal motivo se los caracteriza no por la potencia activa que depende de la diferencia de fases entre la tensión y la corriente sino por la potencia aparente.

$$S = UI, \quad (8-38)$$

que representa el producto de los valores eficaces de la tensión y de la intensidad.

Es evidente que la potencia aparente corresponde al valor máximo de la potencia activa que se puede obtener para una tensión y una intensidad dadas. Observemos también que la amplitud de la componente sinusoidal de la potencia instantánea (8-36) es numéricamente igual a la potencia aparente. Las potencias activa y aparente tienen dimensiones iguales, aunque la unidad de potencia, el watt (kilowatt) se aplica a la potencia aparente bajo la denominación de vol-ampere (kilovolt-ampere) designándose en forma abreviada por VA (kVA). Esto permite, al expresar numéricamente la potencia aparente, hablar de una potencia de tantos voltampere, ya que el nombre mismo de la unidad indica de inmediato que se trata de una potencia aparente.

Más adelante (subcap. 9-1 y 9-2) se podrá ver en sencillos ejemplos que para las potencias aparentes no rige la ley de conservación, ya que la suma de las potencias aparentes de las fuentes de energía no es igual, en general, a la suma de las potencias aparentes de los receptores de energía.

La relación entre la potencia activa y la aparente se llama *factor de potencia*. Es igual al coseno del ángulo de diferencia de fases entre la tensión y la corriente.

$$\frac{P}{S} = \frac{UI \cos \varphi}{UI} = \cos \varphi. \quad (8-39)$$

Para un mejor aprovechamiento de las instalaciones eléctricas conviene disponer de un factor de potencia lo más alto posible o de una mínima diferencia de fases entre la corriente y la tensión. El mejor rendimiento se obtiene cuando $\cos \varphi = 1$. Así, por ejemplo, para alimentar un receptor de una potencia de 10 000 kW para $\cos \varphi = 0,7$, la potencia de las fuentes de alimentación debe calcularse en 14 300 kW y para $\cos \varphi = 1$, en 10 000 kW.

También conviene disponer de un alto factor de potencia para disminuir las pérdidas en las líneas de transmisión. Para una potencia activa dada P del receptor, la intensidad en la línea es tanto menor cuanto mayor es el valor de $\cos \varphi$:

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}$$

La pérdida de potencia en la resistencia r_l de los conductores de la línea

$$\Delta P = r_l I^2 = \frac{r_l P^2}{U^2 \cos^2 \varphi}$$

es inversamente proporcional al cuadrado del factor de potencia del receptor de energía.

Cuanto más bajo sea el factor de potencia, tanto más caro resultará el suministro de energía a los consumidores. De allí que se establezca generalmente una tarifa diferencial para la energía eléctrica. Cuanto menor es $\cos \varphi$, tanto más alto el precio de la energía suministrada.

En los cálculos de los circuitos eléctricos, suele aplicarse la magnitud

$$Q = UI \sin \varphi, \quad (8-40)$$

llamada *potencia reactiva*. Es positiva para $\varphi > 0$ y negativa para $\varphi < 0$.

La unidad de potencia, el watt, aplicada a la potencia reactiva recibe el nombre de voltampere reactivo y se designa con los símbolos VAR. Así, el mencionar una potencia de tantos VAR, ya implica que se trata de una potencia reactiva.

Las potencias activa, reactiva y aparente están ligadas por las siguientes relaciones:

$$S^2 = P^2 + Q^2, \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \frac{Q}{P} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (8-41)$$

Las consideraciones mencionadas más arriba respecto a la conveniencia de aumentar el $\cos \varphi$ de la carga, exigen que se reduzca la potencia reactiva de la carga.

La disminución de la potencia reactiva de carga hace bajar la potencia aparente de la fuente de alimentación y la potencia de las pérdidas en la línea de transmisión. Es fácil comprobarlo representando la potencia de las pérdidas bajo la forma siguiente:

$$\Delta P = r_l I^2 = r_l \frac{S^2}{U^2} = \frac{r_l P^2}{U^2} + \frac{r_l Q^2}{U^2}$$

(parág. 12-8). A continuación se demostrará que la ley de conservación rige para las potencias reactivas y puede formularse de la siguiente manera:

La suma de todas las potencias reactivas generadas (producidas) es igual a la suma de todas las potencias reactivas consumidas.

Demostraremos que en cualquier circuito pasivo la potencia reactiva está vinculada con la frecuencia de la corriente alterna y con los valores de las amplitudes de la energía que se acumula periódicamente en los campos eléctrico y magnético de los elementos del circuito. Para la inductancia y la capacidad las potencias Q_L y Q_C pueden representarse bajo la siguiente forma:

$$Q_L = UI \sin \frac{\pi}{2} = \omega LI \cdot I = \omega \frac{LI_m^2}{2} = \omega W_{M.máx.}$$

$$Q_C = UI \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -U\omega CU = -\omega \frac{CU_m^2}{2} = -\omega W_{e.máx.}$$

donde $W_{M.máx.}$ y $W_{e.máx.}$ son los valores máximos de la energía que se acumula periódicamente en los campos magnético y eléctrico de la inductancia y de la capacidad. Para las resistencias la potencia reactiva

es igual a cero (sen $\varphi = 0$). De modo que, según la ley de conservación de las potencias reactivas, la potencia reactiva a la entrada del circuito pasivo debe ser igual a la suma algebraica de las potencias reactivas en las inductancias y capacidades que forman parte del circuito $Q = \Sigma (Q_L + Q_C)$ o también

$$Q = \omega (\Sigma W_{M.máx.} - \Sigma W_{e.máx.}). \quad (8-42)$$

Mientras que la potencia activa representa una magnitud que define (en promedio) un trabajo realizado o transmitido en la unidad de tiempo, la potencia reactiva y la aparente no determinan ni un trabajo realizado ni una energía transmitida en una unidad de tiempo.

Sin embargo, por analogía con la noción de potencia activa, en la electroenergética, al concepto convencional de potencia reactiva se le atribuye un sentido análogo y se la considera como la potencia de generación, de consumo o de transmisión de cierta magnitud convencional, llamada *energía reactiva* W_r :

$$Q = \frac{W_r}{t}. \quad (8-43)$$

Las dimensiones de la energía reactiva W_r son iguales a las de la energía. La medida unitaria de la energía, el watt-hora, aplicada a la energía reactiva, toma el nombre de voltampere-hora reactivo y se designa por VA-h.

Según la ley de conservación de las potencias reactivas se puede formular la ley de conservación para la energía reactiva: en cualquier circuito, la energía reactiva generada es igual a la energía reactiva consumida.

Examinando la potencia reactiva como una potencia de generación, de transmisión o de consumo de energía, debe considerarse la inductancia, para la cual $Q_i > 0$, como consumidor de energía reactiva, y la capacidad, para la cual $Q_c < 0$, como generador de energía reactiva.

Si en un problema cualquiera, además de la energía se considera la magnitud convencional llamada energía reactiva, a fin de evitar confusiones y para introducir una distinción clara entre los dos conceptos, a la energía propiamente dicha se le llama activa.

En la práctica, se puede medir la energía reactiva con medidores, determinándose, para una carga variable con el tiempo, la potencia reactiva media en un intervalo de tiempo cualquiera, según la expresión (8-43) o el factor medio de potencia ($\cos \varphi$)_{med.} según la fórmula

$$(\text{tg } \varphi)_{\text{med}} = \frac{W_r}{W_a} = \frac{Q_{\text{med}} t}{P_{\text{med}} t} = \frac{Q_{\text{med}}}{P_{\text{med}}}; \quad (8-44)$$

donde W_a es la energía activa.

P_{med} y Q_{med} son los valores medios de las potencias activa y reactiva respectivamente.

Estudiamos ahora un procedimiento sencillo que permite calcular la potencia activa y reactiva en función de la tensión y de la corriente complejas. Consiste en multiplicar la tensión compleja \dot{U} por la intensidad compleja conjugada \dot{I} .

Ese producto se llama *potencia compleja*. Designaremos la potencia compleja con el símbolo \tilde{S} .

Sea

$$\dot{U} = Ue^{j\psi_u}; \quad \dot{I} = Ie^{j\psi_i},$$

entonces

$$\dot{I} = Ie^{-j\psi_i},$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \dot{U}\dot{I} &= Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = \\ &= UIe^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ. \end{aligned} \quad (8-45)$$

En esta expresión la parte real de la potencia compleja es igual a la potencia activa; el valor de la parte imaginaria, igual a la potencia reactiva y el módulo del complejo, igual a la potencia aparente.

Suele calcularse la potencia compleja también de otra manera, esto es, multiplicando la tensión compleja conjugada por la intensidad compleja. Así tenemos:

$$\begin{aligned} \tilde{S} = \dot{U}\dot{I} &= Ue^{-j\psi_u} \cdot Ie^{j\psi_i} = UIe^{-j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{-j\varphi} = \\ &= UI \cos \varphi - jUI \sin \varphi = P - jQ \end{aligned} \quad (8-46)$$

donde la potencia reactiva es igual al valor de la parte imaginaria de la potencia compleja tomada con signo cambiado, es decir:

$$Q = -\text{Im}[\tilde{S}].$$

8-9. Dipolo pasivo.

La corriente y la tensión sinusoidales están ligadas a la entrada del dipolo pasivo (fig. 8-11) por la ley de Ohm

$$\dot{U} = Z\dot{I} \quad e \quad \dot{I} = Y\dot{U},$$

donde Z e Y son la impedancia y la admitancia complejas a la entrada del dipolo.

A la impedancia compleja de entrada $Z = r + jx$ le corresponde el esquema equivalente de un dipolo que consta de una resistencia activa r y de una reactancia x conectadas en serie. Esta última debe considerarse, según el signo de x , como reactancia inductiva o capacitiva, razón por la cual en el esquema equivalente (fig. 8-13. a) el ele-

mento x está representado convencionalmente con un rectángulo. La tensión \dot{U} se puede descomponer en sus componentes

$$\dot{U} = Z\dot{I} = (r + jx)\dot{I} = r\dot{I} + jx\dot{I} = \dot{U}_a + \dot{U}_r,$$

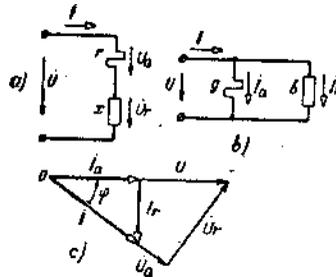


FIG. 8-13

donde $\dot{U}_a = r\dot{I}$: la componente que está en fase con la corriente llamada *componente activa de la tensión*;

$\dot{U}_r = jx\dot{I}$: componente defasada respecto a la corriente de un ángulo $\frac{\pi}{2}$, es la *componente reactiva de la tensión*;

\dot{U}_a y \dot{U}_r : pueden ser considerados como las tensiones en los elementos r y x del esquema equivalente.

En la figura 8-13, c se da el diagrama vectorial para un caso particular cuando $\varphi > 0$, es decir, cuando x es una reactancia de inducción. El triángulo formado por los vectores \dot{U} , \dot{U}_a y \dot{U}_r y cuyos lados son proporcionales a z , r y $|x|$, se llama *triángulo de tensiones*. El triángulo semejante a éste, cuyos lados, en escala arbitraria, son iguales a z , r y $|x|$, se llama *triángulo de impedancias*. Del triángulo de tensiones tenemos:

$$U_a = U \cos \varphi, \quad U_r = U |\sin \varphi|, \quad U = \sqrt{U_a^2 + U_r^2}.$$

Al complejo de la admitancia de entrada $Y = g - jb$ le corresponde el esquema equivalente de un dipolo, formado por una conexión en paralelo de elementos caracterizados por una conductancia g y una susceptancia b . Esta última según el signo de b , será inductiva o capacitiva. De allí que en el esquema equivalente (fig. 8-13, b) el elemento b se represente convencionalmente por un rectángulo. La corriente a la entrada del dipolo, puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\dot{i} = Y\dot{U} = (g - jb)\dot{U} = g\dot{U} - jb\dot{U} = \dot{i}_a + \dot{i}_r,$$

donde $\dot{i}_a = g\dot{U}$: es la componente que está en fase con la tensión y se llama *componente activa de la corriente*;

$\dot{i}_r = -jb\dot{U}$: componente defasada respecto a la tensión de un ángulo $\frac{\pi}{2}$ llamada *componente reactiva de la corriente*;

$\dot{i}_a = \dot{i}_r$: pueden ser consideradas como corrientes en los elementos g y b del esquema equivalente.

El triángulo formado por los vectores \dot{I} , \dot{i}_a , \dot{i}_r , y cuyos lados son proporcionales a y , g , $|b|$, se llama *triángulo de corrientes*.

El triángulo, semejante al anterior, cuyos lados, en escala arbitraria, son iguales a y , g y $|b|$ se denomina *triángulo de admitancias*. Del triángulo de las corrientes tenemos:

$$I_a = I \cos \varphi; \quad I_r = I |\sin \varphi|; \quad I = \sqrt{I_a^2 + I_r^2}.$$

Para las potencias S , P y Q del dipolo tenemos:

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I} = Z\dot{I}\dot{I} = ZI^2;$$

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I} = \dot{U}\dot{Y}\dot{U} = \dot{Y}U^2;$$

$$S = UI \cos \varphi = zI^2 = yU^2;$$

$$P = UI \cos \varphi = U_a I = UI_a = rI^2 = gU^2;$$

$$Q = UI \sin \varphi = xI^2 = bU^2$$

Para el valor absoluto de la potencia reactiva son válidas también las expresiones

$$|Q| = U_r I = UI_r.$$

De las expresiones $S = UI$, $P = U_a I = UI_a$, $|Q| = U_r I = UI_r$ se deduce que los lados de los triángulos de las tensiones y de las corrientes son proporcionales a las potencias S , P y $|Q|$. El *triángulo de potencias* es semejante a éstos, y sus lados, en escala arbitraria, son iguales a las potencias S , P y $|Q|$.

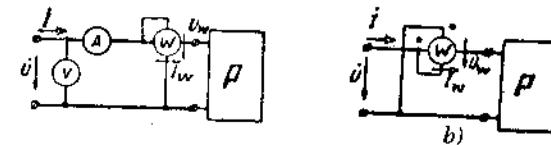


FIG. 8-14

En un circuito eléctrico el elemento lineal pasivo y real en el que se desarrollan complejos procesos electromagnéticos y transformaciones

de energía, considerado en su totalidad respecto a los bornes por los que se conecta con el resto del circuito, constituye un dipolo. Por lo tanto son válidos para él, con una corriente y una tensión sinusoidales, los dos esquemas equivalentes representados en la figura 8-13.

Los parámetros de un elemento real (o de un conjunto de elementos reales) considerado como dipolo, se pueden determinar experimentalmente, midiendo a su entrada, la intensidad, la tensión y la potencia por medio del amperímetro, del voltímetro y del vatímetro, respectivamente. En la figura 8-14, *a* se muestra el esquema de conexión de los aparatos. El vatímetro tiene dos circuitos, o dos arrollamientos, el de la corriente y el de la tensión. El arrollamiento de la corriente se conecta en serie con el circuito; el arrollamiento de la tensión, en paralelo con los bornes de entrada del dipolo.

Dos bornes del vatímetro, uno en el arrollamiento de la corriente, el otro en el de la tensión, tiene por lo común unas marcas especiales, generalmente unos asteriscos (*). El vatímetro mide la magnitud igual a $U_w I_w \cos \angle \dot{U}_w, \dot{I}_w$, donde U_w e I_w son los valores eficaces de la tensión y de la corriente, aplicadas al vatímetro; $\angle \dot{U}_w, \dot{I}_w$ es el ángulo de diferencia de fases entre ellos y que corresponde a iguales sentidos positivos de \dot{U}_w e \dot{I}_w respecto a los bornes marcados con asterisco (así, por ejemplo, como está indicado en la figura *a* y *b*, desde los bornes señalados con asterisco hacia los bornes no marcados). En ambos esquemas de la figura 8-14 $U_w = U$ e $I_w = I$; sin embargo, en tanto que en el primer esquema $\angle \dot{U}_w, \dot{I}_w = \angle \dot{U}, \dot{I} = \varphi$, en el segundo esquema es $\angle \dot{U}_w, \dot{I}_w = \varphi \pm \pi$. El primer esquema corresponde a una conexión correcta. En él el vatímetro mide $UI \cos \varphi = P$. El segundo esquema es incorrecto, pues el vatímetro mide

$$UI \cos(\varphi \pm \pi) = -P,$$

la aguja no se desplazará según la escala, sino en sentido opuesto.

Habiendo determinado con los aparatos los valores de U , I y P , hallaremos:

$$z = \frac{U}{I}; \quad y = \frac{I}{U}; \quad r = \frac{P}{I^2} \quad \text{y} \quad g = \frac{P}{U^2}.$$

Luego se pueden calcular los valores absolutos de las reactancias y susceptancias

$$|x| = \sqrt{z^2 - r^2} \quad \text{y} \quad |b| = \sqrt{y^2 - g^2}.$$

Para determinar el signo de x y b hay que efectuar mediciones complementarias en nuevas condiciones. Por ejemplo, se conecta en serie con el dipolo que se examina una reactancia conocida de inducción o de capacidad y confrontando los parámetros hallados del esquema inicial y del transformado se puede inferir el signo de x y de b del dipolo en cuestión.

Debe recordarse que los parámetros del elemento real del circuito

dependen en general de la frecuencia y, estando determinados para una frecuencia dada, no pueden aplicarse con otras frecuencias. Al variar la frecuencia, no sólo varía la magnitud de los parámetros sino también su carácter; así, por ejemplo, la inductancia puede quedar sustituida por la capacidad y viceversa. En los subcapítulos siguientes se estudian algunos fenómenos que ejercen una influencia sobre los parámetros de los esquemas equivalentes de los elementos reales de un circuito.

Problema 8-4. La tensión y la corriente a la entrada del dipolo pasivo (fig. 8-11) tienen los siguientes valores: $u = 100 \sin(314t - 15^\circ)$ V, $i = 10 \sin(314t + 45^\circ)$ A.

Determinar los parámetros de dos esquemas equivalentes del dipolo, las componentes activas y reactivas de la tensión y de la corriente, las potencias activa y reactiva y aparente a la entrada del dipolo.

Solución.

$$\dot{U}_m = 110 \angle -15^\circ \text{ V}; \quad \dot{I}_m = 10 \angle 45^\circ \text{ A};$$

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{100 \angle -15^\circ}{10 \angle 45^\circ} = 10 \angle -60^\circ = 5 - j5\sqrt{3} \Omega;$$

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{10 \angle -60^\circ} = 0,1 \angle 60^\circ = 0,05 + j0,05\sqrt{3} \Omega^{-1};$$

$$r = 5 \Omega; \quad x = -5\sqrt{3} \Omega; \quad g = 0,05 \Omega^{-1}; \quad b = -0,05\sqrt{3} \Omega^{-1};$$

$$\varphi = \arg Z = \psi_u - \psi_i = -15^\circ - 45^\circ = -60^\circ;$$

$$U_{am} = U_m \cos \varphi = 100 \cos \angle -60^\circ = 50 \text{ V};$$

$$U_{rm} = U_m |\sin \varphi| = 100 |\sin \angle -60^\circ| = 50\sqrt{3} \text{ V};$$

$$I_{am} = I_m \cos \varphi = 10 \cos \angle -60^\circ = 5 \text{ A};$$

$$I_{rm} = I_m |\sin \varphi| = 10 |\sin \angle -60^\circ| = 5\sqrt{3} \text{ A};$$

$$u_a = 50 \sin(314t + 45^\circ) \text{ V};$$

$$u_r = 50\sqrt{3} \sin(314t - 45^\circ) \text{ V};$$

$$i_a = 5 \sin(314t - 15^\circ) \text{ A};$$

$$i_r = 5\sqrt{3} \sin(314t + 75^\circ) \text{ A};$$

$$P = UI \cos \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \cos \angle -60^\circ = 250 \text{ W};$$

$$Q = UI \sin \varphi = -250\sqrt{3} \text{ VAR};$$

$$S = UI = 500 \text{ VA}.$$

8-10. Nociones acerca del efecto de superficie y de proximidad.

En la figura 8-15 se muestra esquemáticamente el cuadro de un campo magnético en el plano de la sección transversal de un conductor aislado por el cual pasa una corriente. Representémoslo ese conductor

como un conjunto de hilos paralelos a un eje. Cuanto más cerca se encuentra el hilo del eje del conductor, tanto mayor es el número de líneas magnéticas que lo enlazan.

Al variar periódicamente la corriente, varía el campo magnético y en los hilos del conductor se inducen f.e.m. que se oponen a la variación de la intensidad. Esa oposición es tanto más apreciable cuanto mayor sea la f.e.m. (cuanto mayor sea el número de líneas magnéticas concatenadas con el hilo), es decir cuanto más cerca se halle el hilo del



FIG. 8-15

eje del conductor. Como consecuencia la densidad de la corriente en los distintos puntos de la sección transversal resulta desigual. Alcanza su valor máximo en la periferia del conductor y el mínimo en su eje.

El fenómeno de la concentración de la corriente en la capa superficial del conductor recibe el nombre de *efecto de superficie*. La brusquedad de su aparición crece con la frecuencia f , con el diámetro del conductor d , la permeabilidad magnética μ y la conductividad γ del material del conductor. Esto se explica con el hecho de que el aumento de μ trae como consecuencia el crecimiento del campo magnético dentro del conductor, el aumento de d crea una gran diferencia en el concatenamiento de los hilos periféricos con las líneas magnéticas, y la elevación de f y de γ acentúa la influencia de las f.e.m. inducidas en los hilos, y que se oponen a la corriente que los recorre. En un caso límite, $\gamma = \infty$, toda la corriente se concentraría en la superficie del conductor en una capa infinitamente delgada.

Como resultado del efecto de superficie la sección transversal del conductor con corriente alterna, es peor aprovechada que con la corriente continua. Para valores iguales de la corriente alterna y continua, las pérdidas térmicas son mayores con la alterna (a igualdad de valores de la corriente continua y de la intensidad eficaz de la corriente alterna). En consecuencia la resistencia que opone el conductor a la corriente alterna (resistencia activa) es superior a la resistencia que opone el conductor a la corriente continua.

Para distinguir esas dos resistencias, a la resistencia para la corriente continua se la llama a veces *resistencia óhmica*.

Otra consecuencia del efecto de superficie es cierta disminución de la inductancia del circuito en virtud del debilitamiento del campo

magnético en la parte interior del conductor. En el caso teórico límite, cuando la corriente se concentra en la superficie del conductor en una capa infinitamente delgada, el conductor carece de campo magnético en su interior.

Con corrientes alternas de alta frecuencia, la parte interna del conductor no se aprovecha y por esta razón se suelen utilizar conductores huecos en forma de tubos. Se emplean también conductores multifilares de alta frecuencia. Estos constan de alambres delgados aislados uno del otro, retorcidos de tal manera que cada uno de ellos ocupe alternativamente en la sección transversal del cable distintas posiciones desde el eje hasta la periferia. Con esa disposición todos los hilos se encuentran en las mismas condiciones y de allí que las corrientes sean iguales entre sí. Además, en los límites de cada alambre, y en virtud de su pequeño diámetro, el efecto de superficie no se manifiesta bruscamente y la densidad de la corriente en la sección del alambre varía de un modo insignificante. Para frecuencias muy grandes, la susceptancia capacitiva entre los alambres se vuelve tan considerable que éstos se encuentran como conectados entre sí y se comportan como un conductor macizo único. Además se vuelven bastante apreciables las pérdidas de energía en la aislación entre los alambres (subcap. 8-11). Es por eso que para frecuencias superiores a 10^6 c/s no se aplican conductores multifilares. Para una frecuencia de 50 c/s, el efecto de superficie sólo se puede apreciar en conductores (barras distribuidoras) de una sección transversal bastante apreciable. En los conductores de cobre, cuyo diámetro es menor de 1 cm y, para una frecuencia de 50 c/s, se puede despreciar prácticamente el aumento de resistencia debido al efecto de superficie.

Sobre la distribución de la corriente alterna en un conductor, ejerce su influencia las corrientes de los conductores vecinos. Este fenómeno recibió el nombre de *efecto de proximidad*. Analizando los cas-

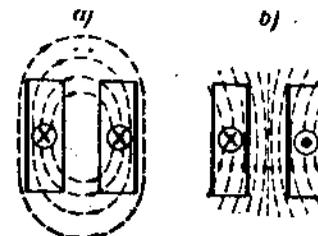


FIG. 8-16

dos esquemáticos de los campos magnéticos en dos conductores con corriente (fig. 8-16) se deduce que las distintas zonas de la sección de los conductores están enlazadas con un número diferente de líneas magnéticas.

Basándonos en consideraciones análogas a las mencionadas en el

examen de un conductor aislado único se puede llegar a la conclusión que la mayor densidad de corriente existirá en las zonas de los conductores concatenadas con un número mínimo de líneas magnéticas. Si las corrientes en los conductores tienen igual sentido (fig. 8-16, a), la mayor densidad de corriente se observará en aquellas zonas de las secciones que están más alejadas entre sí; si en cambio las corrientes son de distinto sentido (fig. 8-16, b), la mayor densidad tendrá lugar en las zonas que se encuentran más próximas entre sí. La zona de las mayores densidades está marcada con trazo grueso en la figura. La distribución desigual de la corriente en la sección de los conductores, producida por el efecto de proximidad, hace aumentar las pérdidas de energía y accentúa la diferencia entre las resistencias que se oponen a la corriente alterna y a la continua. Los cálculos de distribución de la corriente en la sección de los conductores, tomando en cuenta el efecto de superficie o el efecto de proximidad y el cálculo de la resistencia del conductor pertenecen a los problemas de la teoría del campo.

8-11. Parámetros y esquemas equivalentes de los condensadores.

En el dieléctrico, entre los electrodos del condensador al cual se le aplica una tensión sinusoidal, se observa desprendimiento de calor. La energía correspondiente es suministrada desde una fuente de alimentación, de allí que la corriente en el conductor adelante respecto a la tensión existente en sus bornes, de un ángulo φ , menor que $\frac{\pi}{2}$ (fig. 8-17). El ángulo complementario de φ , se designa con el símbolo δ y se llama *ángulo de las pérdidas*.

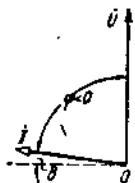


Fig. 8-17

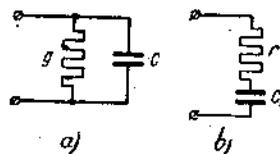


Fig. 8-18

Para el condensador, como para cualquier dipolo se pueden construir dos esquemas (fig. 8-18) en los que g y r representan las pérdidas de energía en el dieléctrico.

Generalmente el ángulo de las pérdidas δ es muy pequeño. La magnitud $\text{tg } \delta$ oscila para las distintas frecuencias entre los límites 10^{-4} y 10^{-1} . En tales condiciones $g \ll \omega C$ y $r \ll \frac{1}{\omega C_1}$, por lo tanto, prácticamente se puede considerar

$$y = \omega C \quad \text{y} \quad z = \frac{1}{\omega C_1}$$

y dado que $yz = 1$, entonces $C = C_1$, es decir, las capacidades C y C_1 de ambos esquemas son prácticamente iguales.

La relación entre r y g nos la darán las relaciones entre las resistencias y las conductancias de los esquemas equivalentes:

$$r = \frac{g}{y^2} \approx \frac{g}{\omega^2 C^2}$$

En la práctica el condensador se caracteriza por los parámetros C y $\text{tg } \delta$. Para el esquema equivalente (fig. 8-18, a)

$$g = \omega C \text{tg } \delta = b_c \text{tg } \delta.$$

La relación entre la susceptancia capacitiva y la conductancia se llama factor de *mérito* (o de calidad) *del condensador*.

$$Q_c = \frac{b_c}{g} = \frac{1}{\text{tg } \delta} = \text{tg } |\varphi| = \frac{x_{c1}}{r}$$

Observemos que para una frecuencia muy alta, cuando la longitud de la onda electromagnética se vuelve commensurable con las dimensiones de los electrodos del condensador, la reactancia del condensador puede volverse inductiva. Es frecuente que en los cálculos de los circuitos se pueda considerar $r = g = 0$, o sea, examinar el condensador como una capacidad.

8-12. Parámetros y esquemas equivalentes de las bobinas y de los reóstatos.

Establezcamos la relación entre la inductancia L , de la bobina, entre el número de sus espiras w y la reluctancia de su circuito magnético R_m para un caso ideal, en que todas las espiras de la bobina están concatenadas con el mismo flujo magnético.

$$\Phi = \frac{wi}{R_m}$$

El *flujo magnético total* concatenado con la bobina es

$$\Psi = w\Phi = \frac{w^2}{R_m} i,$$

de donde la inductancia de la bobina es

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{w^2}{R_m}.$$

Para aumentar la inductancia se puede reducir la reluctancia mediante la instalación, en el interior de la bobina, de un núcleo ferromagnético. En esas condiciones surgen una serie de fenómenos que se

analizan en el subcapítulo 12-11. Aquí se estudian las bobinas sin núcleos ferromagnéticos.

Las espiras de las bobinas reales son atravesadas por flujos magnéticos de diversa magnitud. Demostraremos que es válida para ellas la siguiente proposición: la inductancia de la bobina con dimensiones de enrollamiento dadas es proporcional al cuadrado del número de espiras.

Supongamos que la bobina de w espiras sea recorrida por una corriente de intensidad i . Conservando las dimensiones de la bobina, aumentemos n veces el número de sus espiras y reduzcamos simultáneamente n veces la intensidad. Al mismo tiempo, la fuerza magnetomotriz no variará ($nw \frac{i}{n} = wi$) y, por consiguiente, no variará el campo magnético. En el lugar de cada espira anterior hay ahora n nuevas espiras y cualquiera de los flujos magnéticos que antes atravesaba una sola espira, atraviesa ahora n espiras, de allí que el flujo magnético total concatenado con la bobina crece n veces. Aumentemos luego la intensidad desde $\frac{i}{n}$ hasta su valor anterior i , entonces la inducción magnética en todos los puntos del espacio aumentará n veces y como resultado aumentará n veces más el flujo magnético total de la bobina. De modo que al conservar las dimensiones de la bobina y la intensidad de la corriente que la recorre y al aumentar n veces el número de espiras, el flujo magnético total de la bobina aumentará n^2 veces, lo cual significa que, para ciertas dimensiones de la bobina, su inductancia es proporcional al cuadrado del número de espiras.

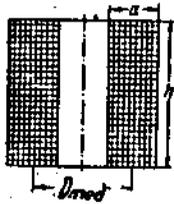


Fig. 8-19

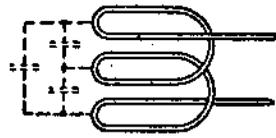


Fig. 8-20

Demostraremos ahora que la resistencia de una bobina de dimensiones dadas es también proporcional al cuadrado del número de espiras. Para mayor claridad examinemos el ejemplo concreto de una bobina cilíndrica cuya sección transversal se puede ver en la figura 8-19.

La resistencia de la bobina es

$$r = \frac{l}{\gamma S};$$

donde $l = w\pi D_{med}$: es la longitud del conductor del cual está hecho el arrollamiento de la bobina;

D_{med} : es el diámetro de las espiras medias del arrollamiento;

γ : es la conductividad del material de los conductores;

$S = k_{ll} \frac{ah}{w}$: es la sección transversal del conductor;

ah : es el área de la sección transversal de la bobina;

k_{ll} : el factor de llenado de la bobina.

El factor k_{ll} es menor que la unidad; con él se toma en cuenta que sólo parte del área ah está llena de un material conductor y el resto corresponde a la aislación.

Reemplazando las expresiones dadas para l y S en la fórmula de r obtenemos:

$$r = \frac{\pi D_{med}}{\gamma ah} \cdot \frac{w^2}{k_{ll}}$$

Como el factor de llenado varía algo al variar la sección del conductor y, por consiguiente, depende de w , la resistencia r no resulta exactamente proporcional al cuadrado del número de espiras.

Debe recordarse también que las proposiciones enunciadas respecto a la proporcionalidad de la inductancia y de la resistencia de una bobina de dimensiones dadas al cuadrado del número de sus espiras, sólo son válidas con una distribución uniforme de la corriente en la sección del conductor, es decir, no habiendo efecto de superficie o efecto de proximidad.

Con frecuencias bajas, por ejemplo para 50 c/s, el esquema equivalente de la bobina consta de una resistencia r y de una inductancia L conectadas en serie (este esquema puede ser reemplazado ciertamente, por otro que conste de una conductancia activa y de una susceptancia. La resistencia del arrollamiento de una bobina aumenta con la frecuencia por influencia del efecto de superficie y principalmente del efecto de proximidad. Como consecuencia la magnitud

$$Q_L = \frac{\omega L}{r},$$

llamada *factor de mérito* (o de calidad) de la bobina es una función no lineal de la frecuencia. Dentro de cierto margen de variación de las frecuencias, la magnitud Q_L permanece casi constante.

Para altas frecuencias no se puede despreciar las capacidades existentes entre las espiras. Esas capacidades intermedias entre las espiras se muestran convencionalmente en la figura 8-20 con una línea de puntos. Cuanto más alta es la frecuencia, tanto menores son las reactancias capacitivas entre las espiras. Las corrientes en las espiras de la bobina resultan desiguales. Hallar la distribución de una corriente de alta frecuencia en una bobina representa un problema complejo. Con frecuencias suficientemente altas la reactancia equivalente de la bobina puede

volverse capacitiva, en virtud de las capacidades existentes entre las espiras.

Si en un campo magnético variable de una bobina se coloca un cuerpo conductor macizo, se originarán en éste corrientes parásitas. Dichas corrientes serán acompañadas con desprendimiento de calor. La energía correspondiente es suministrada por la fuente de alimentación del circuito eléctrico, por eso la resistencia equivalente de la bobina

$r = \frac{P}{I^2}$ crece. Las corrientes parásitas se oponen a la variación del

campo magnético según la ley de Lenz, es decir, producen una acción desmagnetizante sobre el campo magnético variable que las origina. De aquí que la presencia de las corrientes parásitas se refleje en cierta disminución de la inductancia de la bobina.

Los reóstatos y las resistencias no regulables que se utilizan en la práctica, poseen siempre cierta inductancia y, además de ello, entre los distintos elementos del reóstato (entre las espiras) existe capacidad. Para frecuencias bajas, las inductancias de los reóstatos y las capacidades entre los distintos elementos, no tienen prácticamente ninguna influencia y no se toman en cuenta en los cálculos.

CAPÍTULO IX

CALCULO DE CIRCUITOS CON CORRIENTES SINUSOIDALES

9-1. Conexión en serie de receptores de energía.

En una conexión en serie de n receptores de energía (fig. 9-1) la tensión es

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dots + \dot{U}_n = Z_1 \dot{I} + Z_2 \dot{I} + \dots + Z_n \dot{I} = Z \dot{I},$$

donde Z es la impedancia compleja equivalente de todo el circuito:

$$Z = r + jx = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n,$$

$$r = \sum_1^n r_k \quad \text{y} \quad x = \sum x_k. \quad (9-1)$$

El defasaje entre la tensión \dot{U} y la corriente \dot{I} se determina de la relación

$$\text{tg } \varphi = \frac{x}{r}. \quad (9-2)$$

Para los valores eficaces de la corriente y de la tensión tenemos:

$$U = zI \quad \text{e} \quad I = \frac{U}{z},$$

donde

$$z = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

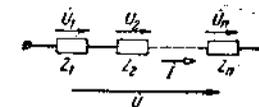


FIG. 9-1

Las potencias activa y reactiva del circuito son:

$$P = UI \cos \varphi = rI^2 = \sum_1^n r_k I^2 = \sum_1^n P_k,$$

$$Q = UI \sin \varphi = xI^2 = \sum_1^n x_k I^2 = \sum_1^n Q_k.$$

La potencia aparente a la entrada del circuito no es igual en general a la suma de las potencias aparentes de los receptores, dado que en un caso general

$$U \neq U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

y

$$S = UI \neq (U_1 + U_2 + \dots + U_n)I = \sum_1^n S_k.$$

El orden del cálculo depende de cuáles son las magnitudes dadas y cuáles son las buscadas. Más abajo se dan a modo de ejemplo algunos problemas ilustrativos típicos.

Problema 9-1. En la figura 9-2, *a* se muestra el esquema de cálculo de una línea de transmisión eléctrica y la carga conectada en ella. La línea está representada por una conexión en serie de una resistencia r_1 y de una reactancia x_1 , y la carga por un dipolo pasivo.

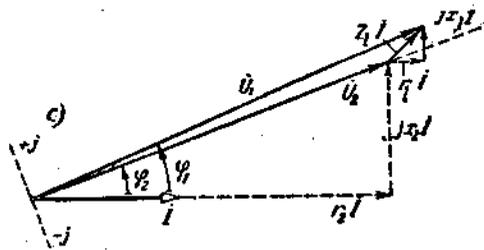
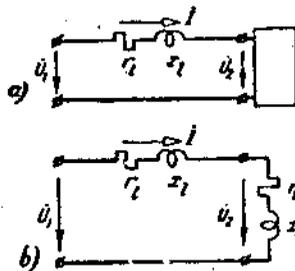


FIG. 9-2

Con los subíndices 1 y 2 están designadas las magnitudes referentes al principio y al final de la línea. Se dan: $r_1 = x_1 = 6 \Omega$, $U_2 = 5\,500 \text{ V}$, $P_2 = 500 \text{ kW}$, $\cos \varphi_2 = 0,91$, $\varphi_2 > 0$. Se quiere determinar la tensión U_1 al principio de la línea.

Solución. Representemos la carga (dipolo pasivo) por un esquema equivalente formado por una conexión en serie de una resistencia r_2 y una reactancia x_2 (fig. 9-2, *b*).

La corriente de la carga (y en la línea) es:

$$I = \frac{P_2}{U_2 \cos \varphi_2} = \frac{500 \cdot 10^3}{5\,500 \cdot 0,91} = 100 \text{ A};$$

$$x_2 = \frac{U_2}{I} = \frac{5\,500}{100} = 55 \Omega;$$

$$r_2 = \frac{P_2}{I^2} = \frac{500 \cdot 10^3}{100^2} = 50 \Omega;$$

$$x_2 = \sqrt{z_2^2 - r_2^2} = \sqrt{55^2 - 50^2} = 20,9 \Omega.$$

Determinamos la impedancia de todo el circuito

$$r_1 = r_2 + r_1 = 50 + 6 = 56 \Omega;$$

$$x_1 = x_2 + x_1 = 20,9 + 6 = 28,9 \Omega;$$

$$z_1 = \sqrt{r_1^2 + x_1^2} = \sqrt{56^2 + 28,9^2} = 63 \Omega.$$

La tensión buscada es

$$U_1 = z_1 I = 63 \cdot 100 = 6\,300 \text{ V}.$$

En la figura 9-2, *c* se da el diagrama vectorial de las tensiones y de la corriente. (Observemos que en el curso de redes eléctricas se dan fórmulas cómodas para el cálculo, que permiten determinar sencillamente la diferencia $U_1 - U_2 = \Delta U$ y hallar $U_1 = U_2 + \Delta U$.)

Problema 9-2. El circuito es el mismo del problema anterior pero están dadas $r_1 = x_1$, U_1 , P_1 y $\cos \varphi_1$ ($\varphi_1 > 0$) y se quiere determinar U_2 .

Solución. Con los valores U_1 , P_1 , $\cos \varphi_1$ ($\varphi_1 > 0$) se determina la intensidad I y las resistencias r_1 y x_1 de todo el circuito; luego se halla $r_2 = r_1 - r_1$, $x_2 = x_1 - x_1$ y $z_2 = \sqrt{r_2^2 + x_2^2}$. La tensión buscada es $U_2 = z_2 I$.

Problema 9-3. El mismo circuito que en el problema 9-1. Datos: $U_1 = 6\,300 \text{ V}$, $P_1 = 560 \text{ kW}$, $U_2 = 5\,500 \text{ V}$, $P_2 = 500 \text{ kW}$, $I = 100 \text{ A}$, $\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$. Se quiere determinar r_1 y x_1 .

Solución. La resistencia es

$$r_1 = \frac{P_1 - P_2}{I^2} = \frac{560 - 500}{100^2} \cdot 10^3 = 6 \Omega.$$

La reactancia se determina por una fórmula análoga para la cual se debe hallar Q_1 y Q_2 :

$$S_1 = U_1 I = 6\,300 \cdot 100 = 630 \text{ kVA};$$

Problema 9-5. Un reóstato y una bobina están conectados en paralelo. El reóstato se considera como una resistencia r_1 , y la bobina como una conexión en serie de una resistencia r_2 y de una inductancia L_2 (fig. 9-4, a). En el circuito están conectados unos amperímetros.

Datos: $r_1 = 20 \Omega$, las indicaciones de los amperímetros dan $I_1 = 2 \text{ A}$, $I_2 = 3 \text{ A}$ e $I = 4 \text{ A}$. Determinar r_2 y $x_2 = \omega L_2$ de la bobina. Despreciar la resistencia de los amperímetros.

Solución. Veamos primero el método gráfico.

La tensión aplicada al circuito es $U = r_1 I_1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ V}$.

Elijamos las escalas para la tensión m_U (V/mm) y para la corriente m_I (A/mm). Tracemos los vectores \vec{U} e \vec{I}_1 (fig. 9-4, b). Ellos tienen la misma dirección, dado que \vec{I}_1 está en fase con la tensión \vec{U} . La construcción de los vectores \vec{I} e \vec{I}_2 está basada en que $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$ y en que la corriente \vec{I}_2 retrasa en fase respecto a la tensión \vec{U} . Tracemos desde el origen y el extremo del vector \vec{I}_1 como centro, arcos cuyos radios son iguales en la escala elegida m_I a las intensidades I e I_2 .

El punto B de intersección de esos arcos determina la posición de los extremos de los vectores \vec{I} e \vec{I}_2 .

Descomponemos el vector de tensión \vec{U} en dos vectores, uno de los cuales, \vec{U}_a , coincide en dirección con el \vec{I}_2 y el otro, \vec{U}_r , le es perpendicular. Son los vectores de las tensiones activa y reactiva en la bobina.

Hallamos los valores eficaces $U_a = m_U OD$ y $U_r = m_U DG$ y finalmente calculamos:

$$r_2 = \frac{U_a}{I_2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{U_r}{I_2}$$

Examinemos ahora el método analítico basado en el diagrama vectorial.

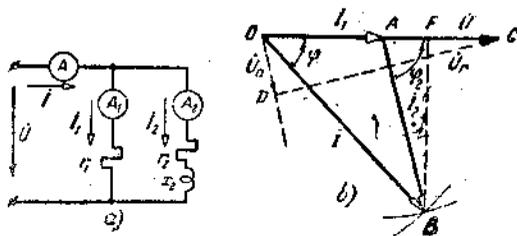


FIG. 9-4

Se construye el diagrama vectorial cualitativamente, no en escala (fig. 9-4, b). Esta sólo es necesaria para representar gráficamente las relaciones trigonométricas entre los distintos segmentos. Del triángulo OAB tenemos:

$$I_2^2 = I_1^2 + I^2 - 2I_1 I \cos \varphi;$$

$$3^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos \varphi.$$

De donde

$$\cos \varphi = 0,688, \quad \varphi = 46^\circ 35'$$

$$OF = OB \cos \varphi = 4 \cdot 0,688 = 2,75 \text{ A};$$

$$AF = OF - OA = 2,75 - 2 = 0,75 \text{ A},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{AF}{AB} = 0,25; \quad \varphi_2 = 75^\circ 32'; \quad \sin \varphi_2 = 0,969,$$

$$r_2 = \frac{U_a}{I_2} = \frac{U \cos \varphi_2}{I_2} = \frac{40 \cdot 0,25}{3} = 3,33 \Omega,$$

$$x_2 = \frac{U_r}{I_2} = \frac{U \sin \varphi_2}{I_2} = \frac{40 \cdot 0,969}{3} = 12,92 \Omega.$$

9-3. Conexión mixta de receptores de energía

Sean dadas las impedancias de todos los elementos del esquema (fig. 9-5) y la tensión \vec{U} a la entrada; se quieren determinar las intensidades en todas sus ramas. Reemplacemos los receptores conectados en paralelo por uno equivalente de admitancia

$$Y' = Y_2 + Y_3 + Y_4$$

o de impedancia $Z' = \frac{1}{Y'}$.

Después de esa transformación, el esquema estará formado por dos impedancias conectadas en serie, Z_1 y Z' . La impedancia equivalente es $Z_{eq} = Z_1 + Z'$.

La corriente en la parte no ramificada del circuito será

$$I = \frac{U}{Z_{eq}}$$

La tensión en la derivación

$$\vec{U}' = Z' \vec{I}$$

Las corrientes en los receptores conectados en paralelo serán:

$$i_2 = \frac{U'}{Z_2}; \quad i_3 = \frac{U'}{Z_3}; \quad i_4 = \frac{U'}{Z_4}.$$

Otro procedimiento cómodo para determinar las intensidades en los circuitos con conexión mixta de receptores de energía, es el método de la similitud o de las magnitudes proporcionales que se estudia en el subcapítulo 9-5, aplicado al circuito de la figura 9-14.

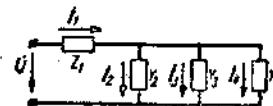


FIG. 9-5

Examinaremos los cálculos de los parámetros de un circuito, que satisfacen a diversas condiciones impuestas, por medio de ejemplos.

Problema 9-6. Las impedancias del esquema de la figura 9-6, son:

$$Z_1 = 200 + j1\,000 \Omega \quad \text{y} \quad Z_2 = 500 + j1\,500 \Omega.$$

¿Cómo debe ser la resistencia r_3 para que la corriente i retrase de $\frac{\pi}{2}$ respecto a la tensión \dot{U} ?

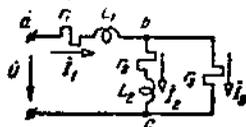


FIG. 9-6

Solución. Ordenemos primero la marcha de las operaciones. Supongamos la fase inicial de la tensión \dot{U} igual a cero, entonces la tensión compleja $\dot{U} = U$. Luego, por el método indicado al principio de este párrafo, hallemos la expresión general de la corriente i_2 .

La corriente i_2 retrasará de $\frac{\pi}{2}$ respecto a la tensión $\dot{U} = U$ en el caso en que la corriente compleja i_2 sea una magnitud imaginaria negativa. Esa es la condición para determinar r_3 .

Siguiendo el plan esbozado, hallamos la impedancia equivalente

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 r_3}{Z_2 + r_3};$$

la corriente en la parte no ramificada del circuito es

$$i_1 = \frac{\dot{U}}{Z};$$

la tensión en la derivación

$$\dot{U}_{bc} = \frac{Z_2 r_3}{Z_2 + r_3} i_1$$

y, finalmente la corriente

$$i_2 = \frac{\dot{U}_{bc}}{Z_2} = \frac{r_3}{Z_2 + r_3} i_1 = \frac{r_3}{Z_2 + r_3} \cdot \frac{U}{Z} = \frac{r_3}{Z_2 + r_3} \cdot \frac{U}{Z_1 + \frac{Z_2 r_3}{Z_2 + r_3}}$$

$$= \frac{r_3 U}{Z_1 Z_2 + Z_1 r_3 + Z_2 r_3} = \frac{r_3 U}{700 r_3 - 1\,400\,000 + j(800\,000 + 2\,500 r_3)}$$

El numerador de esa expresión es una magnitud real. Para que i_2 sea una magnitud imaginaria negativa es necesario que el denominador sea una magnitud imaginaria positiva. Dicha condición será satisfecha para $700 r_3 - 1\,400\,000 = 0$ ó para $r_3 = 2\,000 \Omega$.

Problema 9-7. ¿Qué relación debe haber entre las impedancias Z_1, Z_2, Z_3 y Z_4 de un esquema de puente (fig. 9-7) para que el puente se encuentre en equi-

librio, es decir, para que la corriente I_0 en la diagonal del puente sea igual a cero? Señalamos que en calidad de indicador de corriente, en la diagonal del puente, se suele utilizar: el teléfono, el galvanómetro de vibración y distintos dispositivos electrónicos.

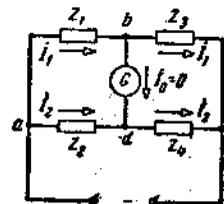


FIG. 9-7

Solución. No hay corriente en la diagonal del puente si $\dot{U}_{bd} = 0$, es decir cuando

$$Z_1 i_1 = Z_2 i_2 \quad \text{y} \quad Z_3 i_1 = Z_4 i_2.$$

Dividiendo miembro a miembro las igualdades, tenemos:

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_4}$$

o también

$$\frac{z_1}{z_3} \angle \varphi_1 - \varphi_3 = \frac{z_2}{z_4} \angle \varphi_2 - \varphi_4;$$

o bien

$$\frac{z_1}{z_3} - \frac{z_2}{z_4}$$

x

$$\varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3.$$

Conociendo tres impedancias complejas para las cuales se observa el equilibrio del puente se puede determinar la cuarta.

9-4. Circuitos ramificados compuestos.

Para establecer la relación entre las corrientes y las f.e.m. en un circuito ramificado, es necesario ante todo señalar en el esquema los sentidos positivos de las f.e.m. y de las corrientes conocidas (dadas) y elegir los sentidos positivos para las f.e.m. y las corrientes desconocidas.

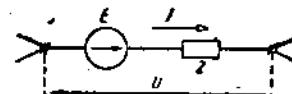


FIG. 9-8

Para cualquier nudo del circuito y de acuerdo a la primera ley de Kirchhoff.

$$\sum i = 0. \tag{9-5}$$

Para las corrientes cuyos sentidos positivos respecto al nudo son distintos (dirigidas hacia el nudo o desde el nudo) las corrientes complejas entran en esa ecuación con signos contrarios. Para la rama de la figura 9-8 la tensión es $\dot{U} = \dot{E} - Z\dot{I}$. Para otros sentidos positivos de \dot{I} o de \dot{E} los términos de esa expresión llevarán otros signos.

En un caso general una rama puede contener varias fuentes de tensión como también varias resistencias, inductancias y capacidades.

Entonces $Z = \Sigma r + \Sigma j\omega L + \Sigma \frac{1}{j\omega C}$ y \dot{E} es igual a la suma algebraica de las f.e.m. complejas de todas las fuentes de tensión.

Para cualquier malla del circuito

$$\Sigma \dot{U} = 0 \quad \text{o también} \quad \Sigma \dot{E} = \Sigma Z\dot{I}, \quad (9-6)$$

expresión que representa la segunda ley de Kirchhoff en su forma compleja. Al coincidir los sentidos positivos de las corrientes y de las f.e.m. con el sentido del recorrido de la malla, las intensidades y las f.e.m. complejas en esa ecuación tienen signo más; en caso contrario tendrán signo menos.

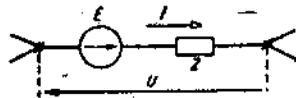


FIG. 9-9

Las ecuaciones que expresan las leyes de Kirchhoff en forma compleja para los circuitos de corriente sinusoidal, tienen exactamente la misma forma que las ecuaciones correspondientes a los circuitos de corriente continua. Por ello es que todos los métodos de cálculo de los circuitos de corriente continua son íntegramente válidos y aplicables a los circuitos de corriente sinusoidal.

La diferencia respecto a los circuitos de corriente continua consiste únicamente en que las tensiones, las f.e.m., los potenciales, las intensidades, las impedancias y las admitancias intervienen en todas las expresiones como números complejos.

La total analogía de cálculo entre los circuitos de corriente continua y sinusoidal existe sólo mientras falte la inductancia mutua. En presencia del fenómeno de la inducción mutua entre los elementos del circuito aparece una serie de particularidades que se examinan en el subcapítulo 12-5.

En el cálculo de los circuitos de corriente continua las intensidades y las tensiones buscadas pueden resultar negativas. Esto sucede, como ya se sabe, cuando los sentidos reales de la corriente o de la tensión no concuerdan con el sentido positivo elegido para ellas. En los cálculos de los circuitos de corriente sinusoidal las intensidades y las tensiones varían periódicamente sus sentidos reales, de modo que la elección arbitraria de los sentidos positivos sólo repercute en sus fases. La

inversión del sentido positivo elegido modifica la fase en un valor π con lo cual cambia el signo del complejo representativo y la posición del vector de corriente varía de 180° en el diagrama vectorial.

El cálculo de las potencias está relacionado con la elección de los sentidos positivos de las corrientes, tensiones y f.e.m.

Cuando los sentidos positivos de la corriente y de la tensión son los mismos (fig. 9-9) el complejo $\dot{S} = \dot{U}\dot{I}$ nos da la potencia compleja consumida en la rama considerada. Al mismo tiempo los valores positivos de P y Q corresponden al consumo y los valores negativos, a la entrega de la energía activa y reactiva. Cuando los sentidos positivos de la corriente y de la tensión son distintos (fig. 9-8), la expresión $\dot{S} = \dot{U}\dot{I}$ nos da la potencia compleja entregada por la rama en cuestión. Entonces los valores positivos de P y Q corresponden a la entrega y los negativos al consumo de energía activa y reactiva.

Cuando los sentidos positivos de la f.e.m. y de la corriente son los mismos (fig. 9-8) la expresión $\dot{S} = \dot{E}\dot{I}$ nos da la potencia compleja generada (producida) por la fuente de f.e.m. y, para sentidos positivos distintos (fig. 9-9), la potencia compleja absorbida por la fuente de f.e.m. En el primer caso los valores positivos de P y Q corresponden a la generación, y los negativos a la absorción de energía activa y

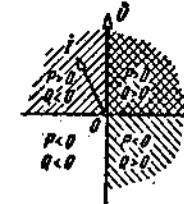


FIG. 9-10

reactiva por la fuente de f.e.m. En el segundo caso, por el contrario, los valores positivos de P y Q corresponden a la absorción y los negativos, a la generación de energía activa y reactiva por la fuente de f.e.m.

En la figura 9-10 se da el diagrama vectorial de la corriente y de la tensión para una rama de un circuito ramificado (fig. 9-8-9-9). Según el régimen del circuito el vector de la corriente \dot{I} puede hallarse en cualquier cuadrante del diagrama (en una de sus posiciones está indicado con líneas de puntos). En el mismo diagrama se señalan con distintos rayados las zonas de posición del vector \dot{I} que corresponden a los valores positivos de las potencias activa y reactiva. Los valores positivos de P y Q , como se señaló más arriba, corresponden sea al consumo, sea a la entrega de energía activa y reactiva por la rama considerada, según para qué sentidos positivos de la corriente y de la tensión (fig. 9-9-9-8) haya sido construido el diagrama vectorial.

En el cálculo de los circuitos ramificados se puede recurrir a la

transformación de los esquemas. Las fórmulas de transformación de un triángulo de impedancias en una estrella y viceversa se distinguen de las deducidas en la primera parte del libro para los circuitos de corriente continua sólo en que en lugar de resistencias y conductancias contienen las impedancias y las admitancias complejas respectivamente.

Observemos que al calcular las impedancias complejas de un esquema transformado, sus partes reales pueden resultar negativas, lo cual corresponde a resistencias activas negativas. El significado de tales resistencias es puramente de cálculo. En presencia de una corriente en dicha resistencia, la potencia activa rI^2 es negativa y, por consiguiente, la energía electromagnética no se absorbe en él sino que se genera. La suma de las potencias activas en todas las ramas del esquema transformado del circuito pasivo no es por cierto negativa y es igual a la potencia activa en el esquema inicial.

Conociendo tres impedancias complejas para las cuales se observa el equilibrio del puente se puede determinar la cuarta.

Problema 9-8. En la figura 9-11 se da el esquema de un circuito que suele presentarse en la protección de relé (filtro-relé de secuencia negativa).

Datos: $r_1 = r_4 = 184 \Omega$, $x_{L2} = x_{C3} = 320 \Omega$, $x_{L4} = x_{C4}$.

A los bornes $a-c$ y $b-d$ están aplicadas las tensiones $U_{ac} = U_{bd} = 10 \text{ V}$, pero \dot{U}_{ac} retrasa respecto a la tensión \dot{U}_{bd} de $\frac{\pi}{3}$. Se quiere determinar la tensión \dot{U}_{cd} .

Solución. Lo más simple es resolver el problema por el método de los nudos. Admitimos que $\dot{U}_{bd} = \dot{E}_s = U_{bd} = 10 \text{ V}$, entonces $\dot{U}_{ac} = \dot{E}_s = 10 \angle -60^\circ \text{ V}$. Tomamos $\dot{\varphi}_d = 0$, entonces $\dot{\varphi}_b = 10 \text{ V}$, $\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_c + \dot{E}_s = \dot{\varphi}_c + 10 \angle -60^\circ$. Es necesario formar una ecuación para determinar $\dot{\varphi}_c$.

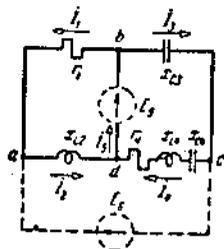


FIG. 9-11

Partiremos de la siguiente ecuación de las corrientes:

$$I_2 + I_4 = I_5 = I_1 + I_3$$

o también

$$\frac{\dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_d}{ix_{L2}} + \frac{\dot{\varphi}_c - \dot{\varphi}_d}{r_4 + i(x_{L4} - x_{C4})} = \frac{\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_c}{-ix_{C3}} + \frac{\dot{\varphi}_b - \dot{\varphi}_c}{r_1}$$

$$\frac{\dot{\varphi}_c + 10 \angle -60^\circ}{j320} + \frac{\dot{\varphi}_c}{185} = \frac{10 - \dot{\varphi}_c}{-j320} + \frac{10 - (\dot{\varphi}_c + 10 \angle -60^\circ)}{185}$$

De donde la tensión buscada será:

$$\dot{U}_{cd} = \dot{\varphi}_c = 10 \angle 60^\circ \text{ V.}$$

9-5. Diagramas topográficos.

Para poder apreciar la magnitud y la fase de la tensión entre los distintos puntos de un esquema conviene recurrir a los diagramas topográficos que son diagramas de los potenciales complejos, correspon-

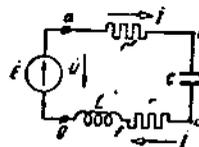


FIG. 9-12

diendo a cada punto del esquema un punto determinado en el diagrama topográfico. El punto inicial de cálculo cuyo potencial se toma igual a cero, corresponde en el diagrama topográfico al origen de las coordenadas.

Construyamos cualitativamente un diagrama topográfico para el esquema representado en la figura 9-12. Llevemos el vector de la corriente \dot{I} en una dirección elegida arbitrariamente (fig. 9-13, a). Tomemos el potencial del punto g igual a cero ($\dot{\varphi}_g = 0$) y determinemos los potenciales de los puntos restantes.

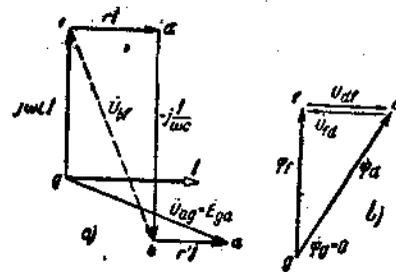


FIG. 9-13

Vamos a recorrer el esquema yendo desde el punto g , al encuentro del sentido positivo de la corriente. El potencial del punto f es mayor que el potencial del punto g en un valor igual al de la tensión en la inductancia $\dot{\varphi}_f = \dot{\varphi}_g + j\omega LI$. Dado que $\dot{\varphi}_g = 0$, entonces φ_f será repre-

sentado por el vector $j\omega L\dot{I}$. Designaremos el extremo de dicho vector por la letra f , ya que él es el que determina el potencial del punto f . El potencial del punto d es superior al del f en una cantidad igual a la tensión en la resistencia r . El potencial $\dot{\varphi}_d$ es igual a $\dot{\varphi}_f + r\dot{I}$. Tracemos desde el extremo del vector $\dot{\varphi}_f = j\omega L\dot{I}$ el vector $r\dot{I}$. Designaremos con d el extremo del vector $r\dot{I}$, dado que él determina el potencial del punto d . En efecto, si se traza un vector desde el origen de las coordenadas hasta el extremo del vector $r\dot{I}$ aquél será igual a la suma de los vectores $j\omega L\dot{I} + r\dot{I}$ y esa suma es igual a $\dot{\varphi}_d$.

Análogamente hallamos $\dot{\varphi}_b = \dot{\varphi}_d - j \frac{\dot{I}}{\omega C}$. De acuerdo a esta igualdad trazamos desde el extremo del vector $r\dot{I}$ (punto d) el vector $-j \frac{\dot{I}}{\omega C}$. Designaremos el extremo del vector $-j \frac{\dot{I}}{\omega C}$ con la letra b puesto que dicho vector determina el potencial del punto b . Finalmente, llevando a partir del extremo del vector $-j \frac{\dot{I}}{\omega C}$, el vector $r\dot{I}$ obtenemos el último punto del diagrama topográfico que determina el potencial $\dot{\varphi}_a = \dot{\varphi}_b + r\dot{I}$ o la tensión $\dot{U}_{ag} = \dot{\varphi}_a - \dot{\varphi}_g = \dot{\varphi}_a$; la f.e.m. de la fuente de alimentación es $\dot{E}_{ga} = \dot{U}_{ag}$.

Hay que prestar especial atención al sentido de los vectores de las tensiones en los diagramas topográficos.

Los vectores de las tensiones están dirigidos, respecto a los puntos del diagrama topográfico, en sentido contrario al positivo de las tensiones respecto a los puntos correspondientes del esquema. Así, por ejemplo, el vector de la tensión \dot{U}_{df} (sentido positivo desde d a f) está dirigido en el diagrama topográfico de f a d y el vector de tensión \dot{U}_{fd} (sentido positivo de f a d) está dirigido en el diagrama topográfico de d a f . Esto concuerda con la regla conocida de la sustracción de los vectores, según la cual el vector \dot{U}_{df} , que representa la diferencia de los vectores $\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}_f$ (fig. 9-13), está dirigido desde el extremo del vector $\dot{\varphi}_f$ al extremo del vector $\dot{\varphi}_d$; y el vector \dot{U}_{fd} que representa la diferencia de los vectores $\dot{\varphi}_f - \dot{\varphi}_d$ está dirigido desde el extremo del vector $\dot{\varphi}_d$ al extremo del $\dot{\varphi}_f$. Tomando en cuenta lo dicho, se puede no indicar en el diagrama topográfico el sentido de los vectores de tensión, bastando la designación de los puntos.

El valor del diagrama topográfico reside en que éste permite determinar las tensiones entre puntos cualesquiera del esquema.

Para ello basta unir los puntos correspondientes del diagrama topográfico con un segmento de recta dándole el sentido adecuado. Así, por ejemplo, el vector de tensión \dot{U}_{bf} representa en el diagrama topo-

gráfico un segmento de recta entre los puntos f y b cuyo sentido está tomado de f a b .

A diferencia de los vectores de tensión, los de f.e.m. tienen respecto a los puntos del diagrama topográfico el mismo sentido positivo que las f.e.m. respecto a los puntos correspondientes del esquema. Así, por ejemplo, el vector de f.e.m. \dot{E}_{ga} (sentido positivo de g a a) está dirigido en el diagrama topográfico también desde el punto g al punto a .

Examinemos otro ejemplo más. Sean dados todos los parámetros del circuito (esquema fig. 9-14) y la tensión \dot{U} en sus bornes. Se quiere hallar las corrientes en las ramas y construir el diagrama topográfico.

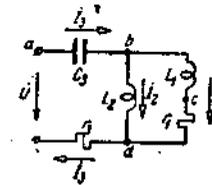


FIG. 9-14

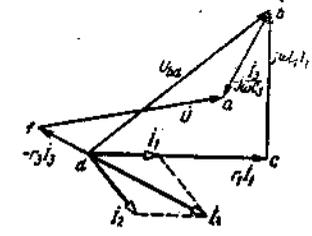


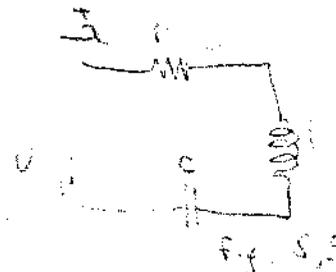
FIG. 9-15

Este problema puede ser resuelto analíticamente por el método corriente: primero el esquema se transforma dándosele la forma más simple; luego se determina la intensidad \dot{I}_3 y después las intensidades \dot{I}_1 e \dot{I}_2 y finalmente se calculan los potenciales de todos los puntos y se construye el diagrama topográfico. Sin embargo, resulta mucho más sencillo encontrar todas las magnitudes, aplicando el método de la similitud.

Adoptando un valor arbitrario para la intensidad compleja \dot{I}_1 , haciendo por ejemplo $\dot{I}_1 = 1$, calculamos las tensiones $r_1\dot{I}_1$ y $j\omega L_1\dot{I}_1$: Luego llevamos sobre el diagrama los vectores \dot{I}_1 , $r_1\dot{I}_1$ y $j\omega L_1\dot{I}_1$ (fig. 9-15). La suma de los vectores $r_1\dot{I}_1 + j\omega L_1\dot{I}_1$ nos da el vector de tensión \dot{U}_{ba} .

Luego calculamos la intensidad $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ba}}{j\omega L_2}$. El vector \dot{I}_2 retrasa respecto al vector \dot{U}_{ba} de $\frac{\pi}{2}$. Determinamos $\dot{I}_3 = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$ analítica y gráficamente. Desde el punto b del diagrama trazamos el vector de tensión $-j \frac{\dot{I}_3}{\omega C_3}$ bajo un ángulo $\frac{\pi}{2}$ con respecto al vector \dot{I}_3 en el sentido del retraso. El extremo de ese vector determina en el diagrama topográfico el punto a . Tracemos desde el punto d el vector $-r_3\dot{I}_3$; su extremo

determinará en el diagrama topográfico el punto f , dado que $\dot{\psi}_f = \dot{\psi}_a - r_2 \dot{I}_3$. El vector de tensión U_{af} puede no coincidir en magnitud con la tensión dada \dot{U} . Para que el diagrama construido concuerde con la tensión dada, basta modificar las escalas de las tensiones y de las intensidades en la relación $\frac{U}{U_{af}}$.



CAPÍTULO X

RESONANCIA EN LOS CIRCUITOS ELECTRICOS

10-1. Resonancia en un circuito serie.

Se llama resonancia a un régimen tal de un circuito pasivo que contiene bobinas de auto-inducción y condensadores, para el cual la reactancia o susceptancia de entrada sean iguales a cero. En régimen de resonancia la corriente, a la entrada del circuito, si es distinta de cero, está en fase con la tensión.

Examinemos un circuito que consta de una resistencia, una inductancia y una capacidad conectadas en serie (fig. 8-5) llamado generalmente circuito serie; la resonancia se produce en él cuando,

$$x = x_L - x_C = 0 \quad \text{o} \quad x_L = x_C$$

o también

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

Para $x_L = x_C$, las tensiones en la inductancia y en la capacidad, opuestas de fase, son iguales en magnitud (fig. 8-7, b); de allí que la resonancia en el circuito considerado reciba el nombre de *resonancia de tensiones*.

Habiendo resonancia, las tensiones en la inductancia y en la capacidad pueden superar considerablemente la tensión en los bornes del circuito que es igual a la tensión en la resistencia activa. La impedancia del circuito para $x = 0$ tiene un valor mínimo $z = \sqrt{r^2 + x^2} = r$, y, para la tensión dada U la intensidad alcanza su valor máximo $\frac{U}{r}$. En un caso teórico, para $r = 0$ y habiendo resonancia, la impedancia del circuito también es igual a cero y la intensidad, para cualquier valor finito de la tensión U , es infinitamente grande. Del mismo modo alcanzan valores infinitamente grandes las tensiones en la inductancia y en la capacidad.

De la condición $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ se deduce que se puede alcanzar la resonancia, sea modificando la frecuencia de la fuente de alimentación, sea modificando los parámetros del circuito, su inductancia o su capa-



cidad. La frecuencia angular para la cual se produce la resonancia se llama frecuencia angular de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10-2)$$

Las reactancias inductiva y capacitiva en régimen de resonancia serán

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho. \quad (10-3)$$

La magnitud ρ se llama resistencia característica del circuito o de la malla.

La relación entre la tensión existente en la inductancia o en la capacidad y la tensión aplicada al circuito, en régimen de resonancia

$$\frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\rho I}{rI} = \frac{\rho}{r} = Q \quad (10-4)$$

se llama factor de resonancia o factor de mérito del circuito. El factor de resonancia indica cuántas veces supera la tensión en la inductancia

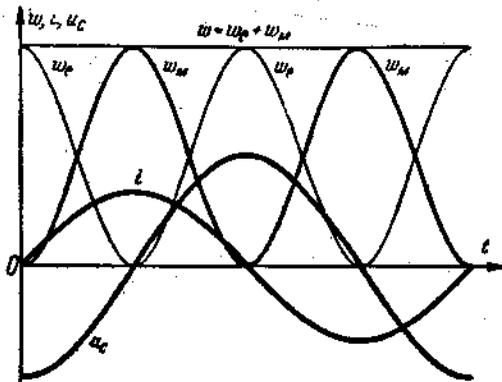


FIG. 10-1

o en la capacidad a la tensión aplicada al circuito, estando éste en resonancia.

$Q > 1$, si $\rho > r$. La denominación de "factor de mérito" (o de calidad) de la malla será aclarada en el subcapítulo 10-2.

Para dilucidar los procesos energéticos que tienen lugar en un régimen de resonancia determinemos la suma de las energías de los campos magnético y eléctrico del circuito $w = w_m + w_e$.

Sea $i = I_m \sin \omega_0 t$. La tensión en la capacidad es

$$u_c = U_{cm} \sin \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} \right) = -U_{cm} \cos \omega_0 t;$$

$$w = w_m + w_e = \frac{Li^2}{2} + \frac{Cu_c^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega_0 t + \frac{CU_{cm}^2}{2} \cos^2 \omega_0 t,$$

pero

$$U_{cm} = I_m \cdot \frac{1}{\omega_0 C} = I_m \sqrt{\frac{L}{C}}$$

y por consiguiente

$$w = w_m + w_e = \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_{cm}^2}{2} = \text{const.}$$

es decir la suma de las energías de los campos magnético y eléctrico no varía con el correr del tiempo. En la figura 10-1 se dan las curvas i , u_c , w_m , w_e y w que muestran que la disminución de energía del campo eléctrico es acompañada por un aumento de energía del campo magnético y viceversa. De modo que se observa un paso incesante de energía del campo eléctrico al magnético y recíprocamente.

Toda la energía que pasa al circuito desde la fuente de alimentación se va transformando en todo momento en energía térmica. De modo que para una fuente de alimentación todo el circuito es equivalente a una resistencia r .

Observemos que el nombre de "resonancia" para el régimen considerado del circuito está tomado de la teoría ondulatoria. Llámase resonancia al proceso de oscilaciones forzadas de una frecuencia tal que la intensidad de las oscilaciones sea máxima a igualdad de condiciones restantes. Se puede caracterizar la intensidad del proceso oscilatorio según los distintos fenómenos cuyos máximos se observan para distintas frecuencias. Es necesario por lo tanto, convenir acerca del criterio de resonancia.

En un circuito eléctrico las cargas fluctúan. Se podría tomar como criterio de resonancia el valor máximo de la amplitud de carga en la capacidad, lo cual corresponde a la amplitud máxima de la tensión en la capacidad. El régimen correspondiente lleva el nombre de resonancia de amplitud. Con el criterio adoptado al principio del capítulo, estando un circuito eléctrico en régimen de resonancia, la corriente está en fase con la tensión aplicada; es la llamada resonancia de fase.

Para el circuito que se estudia (fig. 8-5), la resonancia de fase corresponde a la máxima velocidad de las cargas fluctuantes o a la intensidad máxima de corriente. Si el condensador cargado se cierra sobre la bobina de autoinducción se observará en el circuito, con una resistencia suficientemente pequeña de la bobina, un proceso de oscilaciones amortiguadas de las tensiones y de la corriente. La frecuencia de dichas oscilaciones se llama frecuencia propia o de oscilación libre. Debe observarse que las frecuencias, en presencia de las cuales se observan las resonancias de fase y de amplitud no concuerdan con la frecuencia de las oscilaciones propias (esto sólo se produce en un caso teórico cuando la resistencia del circuito es igual a cero).

El criterio de resonancia adoptado aquí, también es aplicable cuando, debido a la gran resistencia del circuito, no pueden originarse las oscilaciones propias.

10-2. Características de frecuencia de un circuito serie.

Supongamos que a un circuito (esquema de la fig. 8-5) está aplicada una tensión sinusoidal $u = U_m \sin \omega t$, cuya amplitud es invariable y cuya frecuencia puede variar desde 0 a ∞ .

La variación de la frecuencia origina la variación de las magnitudes que caracterizan las propiedades del circuito. Varía su reactancia y por consiguiente la impedancia como también el ángulo φ (argumento de la impedancia compleja). Las relaciones entre las magnitudes que caracterizan las propiedades del circuito y la frecuencia, se llaman *características de frecuencia del circuito*.

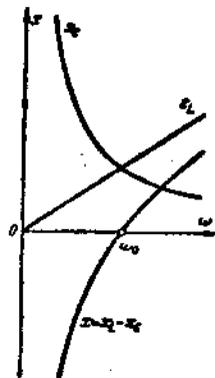


FIG. 10-2

características de frecuencia del circuito. Análogamente, si relacionamos la intensidad, la tensión y la potencia con la frecuencia tendremos las características de frecuencia de las magnitudes que determinan el régimen del circuito. Los gráficos representativos de dichas relaciones se llaman *curvas de resonancia*.

La variación de la frecuencia hace variar la reactancia del circuito. En la figura 10-2 se dan las características de frecuencia de x_L , x_C y $x = x_L - x_C$. La variación de la reactancia trae como resultado la variación del régimen del circuito. En la figura 10-3 se da un ejemplo de curvas de resonancia $I(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$ y de la curva $\varphi(\omega)$ para un circuito cuyo factor de mérito es $Q = 1,25$. Para $\omega = 0$ la tensión, aplicada al circuito, no varía en el tiempo y por lo tanto no hay corriente en el circuito. Al variar ω de 0 a ω_0 la reactancia resultante tiene un carácter capacitivo y varía de $-\infty$ a 0. Como consecuencia la intensidad crece de 0 hasta su valor máximo U/r y la diferencia de fases entre la tensión y la corriente varía de $-\frac{\pi}{2}$ hasta 0. Al variar ω de ω_0 a ∞ , la reactancia resultante crece de 0 a ∞ y tiene un carácter inductivo. Como consecuencia la corriente disminuye desde su valor

máximo hasta 0 y el ángulo φ crece desde 0 hasta $\frac{\pi}{2}$. La tensión rI varía en función de la frecuencia del mismo modo que la corriente.

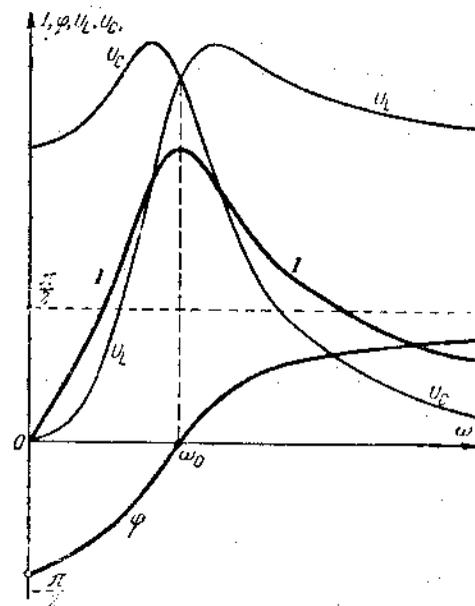


FIG. 10-3

En la expresión que da la tensión en la inductancia, $U_L = x_L I$, ambos factores dependen de la frecuencia. Para $\omega = 0$, la reactancia $x_L = 0$, la intensidad $I = 0$ y por consiguiente, $U_L = 0$. Al variar ω de 0 a ω_0 , ambos factores aumentan y U_L crece. Al seguir aumentando $\omega > \omega_0$, la intensidad I disminuye, pero la tensión U_L sigue elevándose debido al aumento de ωL . El análisis que aquí omitimos evidencia que para

un circuito cuyo $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ese crecimiento de U_L prosigue incesantemente hasta alcanzar el valor U , y para el circuito con $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la tensión U_L , para cierto valor de $\omega_L > \omega_0$ alcanza su máximo $U_{L_{\max}} > U$, para bajar después. Para $\omega = \infty$, $\omega_L = \infty$ y por consiguiente $U_L = U$.

Examinemos ahora de qué manera depende la tensión en la capacitancia, $U_C = x_C I$, de la frecuencia. Para $\omega = 0$ no hay corriente en el circuito y por lo tanto $U_C = 0$. Al crecer ω desde cero, x_C disminuye ininterrumpidamente. El análisis demuestra que para un circuito cuyo

$Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la tensión U_C disminuye sin cesar y para un circuito con

$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la tensión se eleva al principio en virtud del crecimiento

de I , alcanza un máximo de $U_{C_{m\acute{a}x.}} > U$ para cierto valor $\omega_c < \omega_0$, y luego disminuye. Para $\omega = \infty$ tanto I como x_C son iguales a cero, de allí que $U_C = 0$. Observemos que $U_{C_{m\acute{a}x.}} = U_{L_{m\acute{a}x.}}$.

El carácter de la variación de la corriente en función de la frecuencia, demuestra que el circuito analizado posee "propiedades selectivas". Si se le aplica una tensión suma de las tensiones sinusoidales de distintas frecuencias, el circuito ofrecerá menor resistencia a la corriente cuya frecuencia sea más próxima a la de resonancia.

Se aprovechan ampliamente las propiedades selectivas de esos circuitos en las comunicaciones eléctricas. En ese caso el régimen de resonancia constituye el régimen normal de trabajo. Por el contrario, en las instalaciones en que el régimen de resonancia no está previsto, es indeseable la aparición de la resonancia, dado que las considerables tensiones que se originan en la bobina y en el condensador pueden resultar peligrosas para la aislación.

Veamos qué influencia tienen los parámetros del circuito sobre la forma de la curva de resonancia $I(\omega)$. Transformemos la expresión dada para la impedancia del circuito

$$z = \sqrt{r^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{r^2 + \omega_0^2 L^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 LC}\right)^2} = r \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$$

La intensidad de la corriente en el circuito es:

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{r \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (10-5)$$

donde $I_0 = \frac{U}{r}$ es el valor eficaz de la corriente en estado de resonancia. Para poder comparar cómodamente las curvas de resonancia una con la otra las examinaremos en forma de relaciones:

$$\frac{I}{I_0} = F_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

La ecuación (10-5) evidencia que la influencia de los parámetros del circuito sobre la forma de la curva de resonancia está totalmente dada por la magnitud Q .

En la figura 10-4 se representa una serie de curvas de resonancia. Cuanto mayor es Q , tanto más pronunciada es la curva de resonancia, tanto mejores son las "propiedades selectivas" del circuito, circunstancia

que, entre otras, indujo a llamar a Q factor de mérito (de calidad). En los circuitos reales, formados por una conexión en serie de una bobina de autoinducción y de un condensador, la magnitud $Q = \frac{e}{r}$ varía con la frecuencia, debido principalmente a la variación de r y L en función

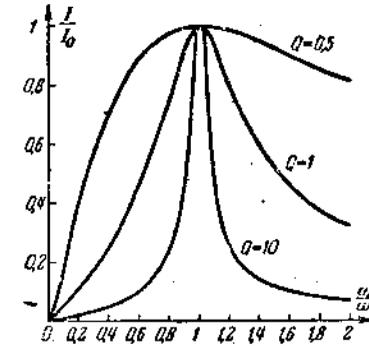


Fig. 10-4

de la frecuencia (ver 8-12). Por lo tanto, generalmente para caracterizar los circuitos se toma el valor de Q correspondiente a la frecuencia de resonancia. Observemos que los valores máximos de Q que se alcanzan en la práctica oscilan entre 200 y 500.

10-3. Resonancia en un circuito con dos ramas en paralelo.

Examinemos el circuito cuyo esquema consta de dos ramas conectadas en paralelo: una con resistencia e inductancia y la otra con resistencia y capacidad (fig. 10-5). Un circuito tal se le suele llamar circuito en paralelo. Este llega a un estado de resonancia cuando la susceptancia de entrada es

$$b = b_1 + b_2 = 0 \quad \text{o también} \quad b_2 = -b_1 \quad (10-6)$$

donde b_1 y b_2 son las susceptancias del circuito.

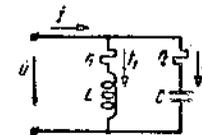


Fig. 10-5

Para $b_2 = -b_1$, las corrientes reactivas en oposición de fase son iguales en magnitud (fig. 10-6), motivo por el cual a esta resonancia se le da el nombre de resonancia de corrientes. Del diagrama vectorial se ve que, en estado de resonancia, la intensidad I a la entrada de un

circuito puede ser considerablemente menor que las intensidades en las ramas. En un caso teórico, para $r_1 = r_2 = 0$ (fig. 10-7), las corrientes I_1 e I_2 están defasadas respecto a la tensión, de $-\frac{\pi}{2}$ y de $\frac{\pi}{2}$ y la suma de las intensidades es $I = I_1 + I_2 = 0$. La resistencia de entrada del circuito es en este caso infinitamente grande.

Sustituyamos en la relación (10-6) que constituye la condición de resonancia, las expresiones de b_1 y b_2 en función de los parámetros del circuito,

$$\frac{\omega L}{r_1^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{r_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 0. \quad (10-7)$$

De aquí se deduce que se puede alcanzar el estado de resonancia, sea modificando la frecuencia de la fuente de alimentación, sea los parámetros del circuito (L , C , r_1 y r_2). Resolviendo la ecuación (10-7) respecto a ω , hallamos el valor siguiente para la frecuencia angular de resonancia,

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - r_1^2}{\frac{L}{C} - r_2^2}}. \quad (10-8)$$

Para alcanzar la resonancia es necesario que las resistencias r_1 y r_2 sean ambas mayores o menores que $\sqrt{\frac{L}{C}}$. Al no cumplirse esa condición resulta una pulsación imaginaria ω'_0 , es decir no existe una frecuencia para la cual tenga lugar la resonancia.

Para $r_1 = r_2 \neq \sqrt{\frac{L}{C}}$ la frecuencia angular de resonancia $\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tiene el mismo valor que para una resonancia en un circuito serie.

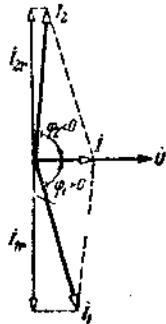


Fig. 10-6

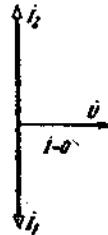


Fig. 10-7

Para $r_1 = r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ la frecuencia angular de resonancia $\omega'_0 = \frac{0}{0}$ tiene cualquier valor, es decir la resonancia se observa para cualquier frecuencia. En efecto, haciendo $r_1 = r_2 = r$, tenemos que la impedancia equivalente del circuito es

$$Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(r + j\omega L)(r - j\frac{1}{\omega C})}{2r + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Sustituyendo en esa expresión $L = r^2 C$, obtenemos $Z_{eq} = r$, o sea que la impedancia equivalente del circuito es una resistencia activa y no depende de la frecuencia, por consiguiente la corriente está en fase con la tensión para cualquier frecuencia y su valor eficaz es igual a $\frac{U}{r}$.

Observemos que en la radiotecnica se utilizan circuitos con pequeñas pérdidas, es decir que en ellos, r_1 y r_2 son pequeños en comparación con $\frac{L}{C}$. En tales condiciones la frecuencia angular de resonancia, puede calcularse por la fórmula

$$\omega'_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Para una frecuencia invariable de la fuente de alimentación, puede obtenerse la resonancia haciendo variar las magnitudes L , C , r_1 y r_2 . Debe tenerse en cuenta que al variar alguno de los parámetros, la resonancia no se alcanza para valores cualesquiera de los parámetros restantes. Al variar la inductancia o la capacidad y para determinadas

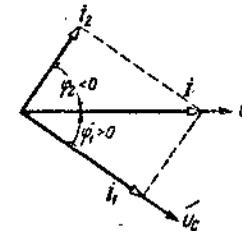


Fig. 10-8

relaciones entre los parámetros restantes, son posibles no solo uno sino dos regímenes de resonancia. Es fácil comprobarlo, examinando la condición de resonancia (10-7). Así, por ejemplo, si varía la capacidad C obtendremos de la condición de resonancia, una ecuación de segundo grado en C .

Si varía la inductancia L y los demás parámetros se mantienen constantes, tendremos una ecuación de segundo grado en L .

Dos raíces reales distintas de esas ecuaciones dan dos valores de



C y L respectivamente, cada uno de los cuales asegura la resonancia. Las raíces iguales corresponden al caso en que es posible un solo régimen de resonancia. Cuando las raíces son complejas, no hay valores de L y de C para los cuales se establezca la resonancia.

Examinemos los procesos energéticos en estado de resonancia. En un caso teórico $r_1 = r_2 = 0$, la intensidad $I = 0$, la energía no se transfiere al circuito y sólo se produce un intercambio de energía entre los campos eléctrico y magnético. Si tan sólo una de las ramas posee una resistencia activa, entonces la intensidad $I \neq 0$ y la energía pasa de la fuente de alimentación al circuito. Al mismo tiempo, como se verá más abajo, a diferencia de la resonancia en una conexión en serie, la suma de las energías de los campos magnético y eléctrico no permanece constante. Por consiguiente, existen intervalos de tiempo durante los cuales la energía pasa de las fuentes de alimentación a la energía de los campos eléctrico y magnético; hay otros en los que la energía es transferida de los campos eléctrico y magnético a las resistencias de las ramas y se transforma en calor. Debemos señalar que no se observa retorno de la energía a la fuente de alimentación, dado que la corriente está en fase con la tensión y en un momento cualquiera el valor instantáneo de la potencia es $p \geq 0$.

La diferencia entre los procesos energéticos, en estado de resonancia, de un circuito simple en paralelo y de un circuito serie, se observa con máxima nitidez cuando la corriente I_2 se adelanta en fase respecto a I_1 de $\frac{\pi}{\alpha}$ (fig. 10-8). La tensión U_0 que retrasa respecto a la intensidad I_2 de $\frac{\pi}{2}$, está en fase con la corriente en la inductancia I_1 . De modo que la corriente en la inductancia y la tensión en la capacidad pasan por cero y por el máximo simultáneamente. Por consiguiente, las energías de los campos eléctrico y magnético alcanzan simultáneamente sus valores máximos y mínimos. Al mismo tiempo no se produce intercambio de energía entre los campos magnético y eléctrico. Cuando los valores absolutos de la tensión u_0 en la capacidad y de la intensidad i_1 en la inductancia aumentan, entonces pasa la energía de la fuente de alimentación a los campos eléctrico y magnético. Al disminuir los valores absolutos de u_0 y de i_1 , la energía de los campos eléctrico y magnético se transforma en calor en las resistencias.

Señalemos que el caso examinado se observa en una malla para la cual hay resonancia con cualquier frecuencia, es decir para $r_1 = r_2 =$

$\sqrt{\frac{L}{C}}$. En efecto, entonces

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{r_1} = \frac{\omega L}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \omega \sqrt{LC};$$

$$|\operatorname{tg} \varphi_2| = \frac{1}{r_2 \omega C} = \frac{1}{\omega \sqrt{LC}}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 |\operatorname{tg} \varphi_2| = 1$$

y por consiguiente

$$\varphi_1 + |\varphi_2| = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 10-1. La pulsación ω y el valor eficaz I de una corriente sinusoidal que alimenta al circuito (fig. 10-9, a) se mantienen invariables. La capacidad del condensador varía sin pérdidas hasta el momento en que, para cierto valor de C ,

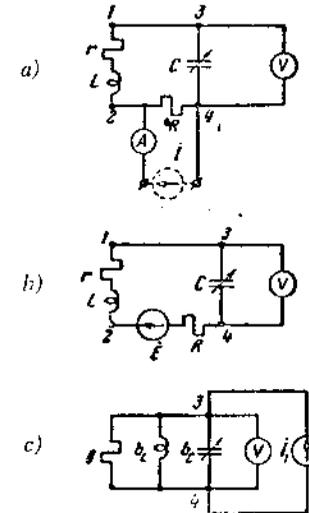


FIG. 10-9

la tensión U medida con un voltímetro alcance el valor máximo U_{\max} . Conociendo las magnitudes I, C, U_{\max} y R , determinar los valores ωL y r de la bobina conectada a los bornes 1 y 2.

Solución. La forma más sencilla de resolver este problema es transformando el esquema del circuito en uno equivalente, formado por una capacidad variable y dos elementos conectados en paralelo —una conductancia activa g y una susceptancia inductiva b_L (fig. 10-9, c)—, con una fuente de intensidad I_1 conectada a los bornes 3 y 4. Entonces, para un valor eficaz invariable de la corriente y para una capacidad variable, el máximo de tensión medida con el voltímetro, se observará en estado de resonancia de las corrientes, dado que la impedancia de entrada del circuito es máxima en esas condiciones.

Siguiendo el método trazado, encaremos la transformación del esquema. La alimentación del circuito (fig. 10-9, a) con la corriente dada I puede interpretarse como una alimentación desde una fuente de intensidad (indicada con línea de puntos). Sustituyamos la fuente de intensidad por una fuente de f.e.m. $E = RI$ (fig. 10-9, b). Ahora pasemos de la fuente de f.e.m. a una nueva fuente de intensidad conectada a los bornes 3 y 4. La corriente de dicha fuente tendrá una intensidad

$$I_1 = \frac{E}{z} = \frac{RI}{z},$$

donde $z = \sqrt{(r+R)^2 + (\omega L)^2}$.

Reemplacemos la conexión en serie de los elementos R , r y L por una conexión en paralelo (fig. 10-9, c).

$$g = \frac{r + R}{z^2}; \quad b_L = \frac{\omega L}{z^2}. \quad (10-9)$$

El máximo de tensión entre los bornes 3 y 4 se observa estando las corrientes en resonancia. Entonces tenemos:

$$b_L = b_C = \omega C; \quad (10-10)$$

$$U_{\text{máx.}} = \frac{1}{g} I_1 = \frac{RI}{gz}. \quad (10-11)$$

Aquí son desconocidos g y z . Despejemos

$$\frac{1}{z} = g - \frac{U_{\text{máx.}}}{RI} = g\alpha, \quad (10-12)$$

donde para abreviar, la relación de las magnitudes conocidas $\frac{U_{\text{máx.}}}{RI}$ se ha designado con α .

Sustituyendo (10-10) y (10-12) en la expresión $g^2 + b_L^2 = \frac{1}{z^2}$ obtenemos:

$$g^2 + (\omega C)^2 = g^2 \alpha^2,$$

de donde

$$g = \frac{\omega C}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}; \quad z^2 = \frac{1}{g^2 \alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{(\omega C)^2 \alpha^2}.$$

De la (10-9) tenemos

$$\omega L = b_L z^2 = \frac{1}{\omega C} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2};$$

$$r = gz^2 - R = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\omega C \alpha^2} - R.$$

10-4. Características de frecuencia de un circuito con dos ramas en paralelo.

Construyamos la curva de resonancia de la corriente $I(\omega)$ en la parte no ramificada del circuito con una tensión constante U de la fuente de alimentación para un caso ideal $r_1 = r_2 = 0$ (fig. 10-10, a). En la figura 10-10, b se muestran las características de frecuencia de las susceptancias $b_1 = b_L = \frac{1}{\omega L}$ y $b_2 = -b_C = -\omega C$ de las ramas y de la susceptancia de entrada del circuito $b = b_1 + b_2 = \frac{1}{\omega C} - \omega C$. La intensidad $I = |b|U$; por eso la curva $|b| = F(\omega)$ es precisamente, en la escala correspondiente la curva de resonancia de la corriente $I(\omega)$.

Al variar ω desde 0 hasta $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la susceptancia equivalente

$b > 0$ es de carácter inductivo y varía de $+\infty$ a 0. Para $\omega = \omega_0$, tenemos la resonancia de las corrientes,

$$b = 0, \quad I = 0, \quad I_1 = \frac{U}{\omega_0 L} = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \text{e} \quad I_2 = \omega_0 C U = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C}}}.$$

Al crecer ω de ω_0 a ∞ , la susceptancia de entrada $b < 0$ tiene carácter capacitivo y varía de 0 a $-\infty$.

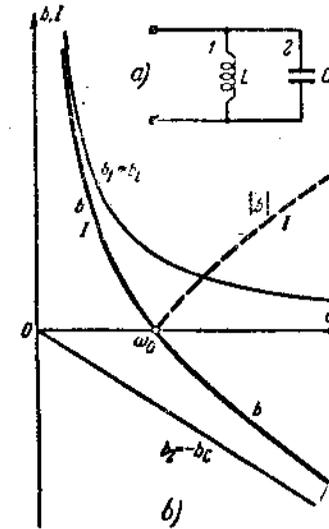


FIG. 10-10

En un caso general, cuando r_1 y r_2 no son iguales a 0 (fig. 10-5) la conductancia activa de entrada del circuito es distinta de cero para cualquier frecuencia, de allí que la intensidad I no sea igual a cero para ningún valor de la frecuencia. El análisis que aquí omitimos, demuestra

que para la condición $r_1 < \sqrt{\frac{L}{C}}$ y $r_2 < \sqrt{\frac{L}{C}}$ la función $I = F(\omega)$, siendo $U = \text{const.}$, pasa por un mínimo que corresponde a una frecuencia distinta de la de resonancia. Esto último se explica por el hecho de que el máximo de la impedancia de entrada tiene lugar para una frecuencia tal que $\frac{\delta z}{\delta \omega} = u$, y la resonancia se produce para una frecuencia con la cual $b = 0$ ó $x = 0$. Cuanto menores sean r_1 y r_2 tanto menor es el valor mínimo de la corriente I , tanto más próximo a la frecuencia de resonancia es el valor de la frecuencia para la cual se observa el mínimo de la intensidad, y tanto más se parece la curva $I = F(\omega)$ a la curva examinada más arriba $I(\omega)$ para $r_1 = r_2 = 0$.

Con la condición $r_1 + r_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ y $U = \text{const.}$, como se ha visto en el subcapítulo 10-3, la intensidad I tiene, para cualquier valor de la frecuencia, un valor constante. La función $I = F(\omega)$ no tiene máximo ni mínimo y se representa gráficamente por una recta paralela al eje de las abscisas.

El análisis demuestra que dada la condición $r_1 > \sqrt{\frac{L}{C}}$ y $r_2 > \sqrt{\frac{L}{C}}$ para cierto valor de la frecuencia, la curva $I = F(\omega)$ pasa por un máximo.

10-5. Noción de resonancia en circuitos compuestos.

Las condiciones de resonancia

$$b = 0 \quad \text{o} \quad x = 0$$

para el esquema de un circuito ramificado con varias inductancias y capacidades implican que las ecuaciones en ω pueden tener varias raíces reales. En otras palabras, para un circuito ramificado puede haber varias frecuencias de resonancia.

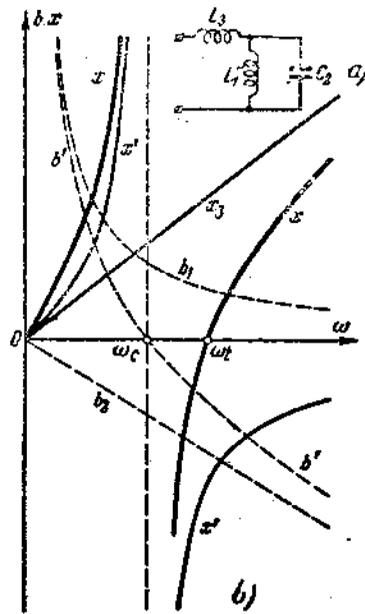


FIG. 10-11

Examinemos por ejemplo, el esquema sin resistencias activas (fig. 10-11, a). La impedancia de entrada está formada por reactivas:

$$Z = j\omega L_3 + \frac{j\omega L_1 \left(-j \frac{1}{\omega C_2} \right)}{j\omega L_1 - j \frac{1}{\omega C_2}} = j \left[\omega L_3 - \frac{\omega L_1}{\omega^2 L_1 C_2 - 1} \right] = jx.$$

La resonancia se establece para $b = 0$ o para $x = 0$, siendo $b = \infty$ si $x = 0$ y viceversa, $x = \infty$ si $b = 0$. Tal situación se produce siempre que se desprecien las resistencias activas en las ramas. De modo que serán frecuencias de resonancia aquellas que dan a x el valor cero o infinito. En el caso estudiado $x = \infty$ para $\omega^2 L_1 C_2 - 1 = 0$ o también $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}} = \omega_c$. Para esa frecuencia tiene lugar la resonancia de las corrientes en las ramas paralelas con L_1 y C_2 . Suponiendo $x = 0$, obtenemos

$$\omega_t = \sqrt{\frac{L_1 + L_3}{L_1 L_3 C_2}}.$$

Para esa frecuencia se establece la resonancia de las tensiones en una conexión en serie formada por una inductancia L_3 y una capacidad equivalente a dos ramas en paralelo. De modo que el esquema en cuestión tiene dos frecuencias de resonancia ω_c y ω_t .

En la figura 10-11, b se dan las características de frecuencia de las susceptancias y reactancias del esquema examinado. Las curvas $b_1 = \frac{1}{\omega L_1}$ y $b_2 = -\omega C_2$ representan las características de las susceptancias de las ramas 1 y 2. La suma de las ordenadas de dichas curvas es igual a las ordenadas de la característica de la susceptancia b' equivalente a las de ambas ramas. La curva $x' = \frac{1}{b'}$ representa la reactancia equivalente de las ramas en paralelo. La suma de las ordenadas de las curvas x' y $x_3 = \omega L_3$ está dada por las ordenadas de la característica de la reactancia de entrada x del circuito. Dicha característica tiene dos puntos singulares, para $\omega = \omega_c$ y $\omega = \omega_t$.

CAPÍTULO XI

TRANSMISION DE ENERGIA CON CORRIENTE
Y TENSION SINUSOIDALES.

11-1. Relaciones entre las tensiones al principio y final de una línea de transmisión de energía.

En las líneas de transmisión eléctrica por aire para una frecuencia de 50 c/s y tensiones inferiores a 35 kW, de longitud relativamente reducida, se pueden despreciar las corrientes originadas por la capacidad existente entre los conductores y por la conductancia de la aislación, y considerar la línea como una conexión en serie de una resistencia y una inductancia. En la figura 11-1 se representa el esquema de un circuito que consta de una línea y de un receptor de energía (carga). En la figura 11-2 se muestra el diagrama vectorial para el caso en que la resistencia reactiva (reactancia) del receptor sea inductiva ($x_2 > 0$ y $\varphi_2 > 0$).

La caída de tensión en la línea $\dot{U}_l = \dot{U}_1 - \dot{U}_2$ está representada en el diagrama vectorial por la diferencia entre el vector \dot{U}_1 (tensión al principio de la línea) y el vector \dot{U}_2 (tensión al final de la línea). A la diferencia algebraica entre las magnitudes de las tensiones al principio y al final de la línea $\Delta U_l = U_1 - U_2$, se le llama *pérdida de tensión*. El valor absoluto de la pérdida de tensión en la línea es menor que la caída de tensión en la línea, $|\Delta U_l| < U_l$. La pérdida y



FIG. 11-1

la caída de la tensión son iguales entre sí sólo en el caso en que $\varphi_2 = \varphi_1$. Entonces los vectores \dot{U}_1 , \dot{U}_2 y \dot{U}_l concuerdan en dirección y $U_l = U_1 - U_2 = \Delta U_l$.

Todos los receptores de energía eléctrica se calculan para un determinado valor de tensión en sus bornes. Veamos como hay que variar la tensión al principio de la línea para que al variar la carga la tensión U_2 al final de la línea se mantenga invariable. Examinemos dos casos.

Supongamos que la potencia activa P_2 del receptor varíe, y la diferencia de fases φ_2 entre la tensión U_2 y la corriente \dot{I} permanezca invariable; entonces el extremo del vector de corriente se desplazará siguiendo la recta OA. El vector $\dot{U}_l = Z_1 \dot{I} = z_1 \dot{I} e^{j\varphi_1}$ está desplazado respecto a la corriente en un ángulo φ_1 , por lo tanto el extremo del vector \dot{U}_l se desplaza siguiendo la recta NB que forma un ángulo φ_1 con la recta OA. El vector \dot{U}_1 es la suma geométrica del vector constante \dot{U}_2 y del vector variable \dot{U}_l . Del diagrama vectorial se deduce que el lugar geométrico de los extremos del vector $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{U}_l$ es la recta NB.

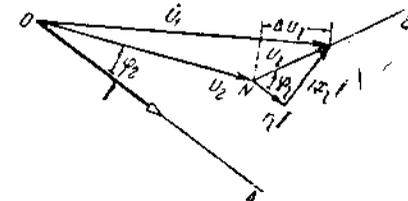


FIG. 11-2

Examinemos ahora otro caso de variación de carga. Supongamos que la potencia activa P_2 del receptor se mantenga constante, y la diferencia de fases φ_2 entre la tensión \dot{U}_2 y la corriente \dot{I} varíe; $P_2 = U_2 I \cos \varphi_2 = U_2 I_a = \text{const}$ donde $I_a = I \cos \varphi_2$. La componente activa I_a de la corriente, para valores constantes de U_2 y P_2 , es constante, por eso al variar φ_2 sólo varía la corriente reactiva. Por consiguiente, el lugar geométrico de los extremos del vector de corriente es la recta AA' perpendicular al vector \dot{U}_2 (fig. 11-3).

Se ha construido el diagrama vectorial para dos casos, cuando $\dot{I} = \dot{I}'$ e $\dot{I} = \dot{I}''$. Las caídas de tensión en la línea están representadas en forma de sumas de caídas de tensión, condicionadas por las componentes activa y reactiva de las corrientes:

$$Z_1 \dot{I}' = Z_1 \dot{I}'_a + Z_1 \dot{I}'_r; \quad Z_1 \dot{I}'' = Z_1 \dot{I}''_a + Z_1 \dot{I}''_r.$$

Los vectores $Z_1 \dot{I}'_r$ y $Z_1 \dot{I}''_r$ son perpendiculares entre sí puesto que lo son los vectores \dot{I}'_r e \dot{I}''_r . Al variar \dot{I}'_r , varía también la componente de la caída de tensión $Z_1 \dot{I}'_r$ y el extremo del vector \dot{U}_1 se desplaza según la recta BCD perpendicular al vector $Z_1 \dot{I}'_a$. Si la corriente retrasa en fase respecto a la tensión \dot{U}_2 , entonces el extremo del vector \dot{U}_1 cae

en la zona CD de dicha recta y $U'_1 > U_2$; mientras que si la corriente \dot{I} se adelanta en fase respecto a la tensión \dot{U}_2 , el extremo del vector \dot{U}_1 se coloca en la zona BC de dicha recta, pudiendo ser la tensión \dot{U}'_1 al comienzo de la línea menor que la tensión U_2 al final de la línea.

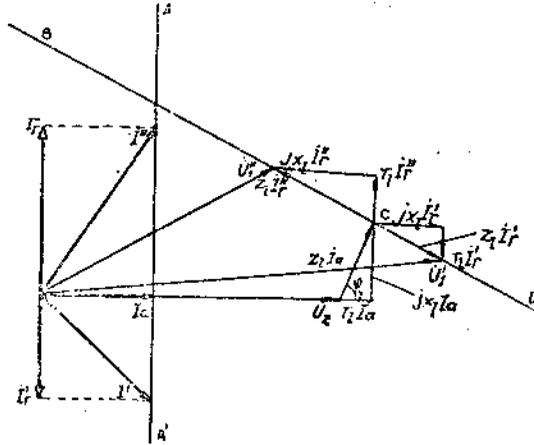


Fig. 11-3

De aquí se infiere que dejando invariable la tensión al principio de la línea, se puede establecer al final de la línea la tensión requerida, haciendo variar la carga reactiva. Este procedimiento se aplica ampliamente en las instalaciones electroenergéticas modernas para mantener constante (regular) la tensión a los consumidores, al variar su potencia activa. A tal efecto se conecta paralelamente al receptor una reactancia regulable. En la práctica se utilizan en calidad de reactancias los condensadores y los motores sincrónicos no cargados, llamados compensadores sincrónicos.

Explicaremos cómo debe regularse la corriente reactiva al variar la potencia activa del receptor, para que la tensión U_2 permanezca constante con una tensión U_1 invariable. Para simplificar, consideraremos la reactancia regulable como una parte componente del receptor de energía.

Tracemos arbitrariamente el vector \dot{U}_2 (fig. 11-4). El vector de caída de tensión en la línea, determinado por la corriente activa del receptor $Z_1 \dot{I}_a = z_1 \dot{I}_a e^{j\varphi_1}$, está desviado respecto al vector \dot{I}_a y por consiguiente también respecto a U_2 de un ángulo φ_1 . Para distintos valores de \dot{I}_a el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_a$ se desplazará según la recta AN que forma el ángulo φ_1 con el vector \dot{U}_2 .

El vector de la caída de tensión en la línea $Z_1 \dot{I}_r$, determinada por la corriente reactiva, es perpendicular al vector $Z_1 \dot{I}_a$, es decir, es

perpendicular a la línea AN . Dado que la suma de los vectores es $\dot{U}_2 + Z_1 \dot{I}_a + Z_1 \dot{I}_r = \dot{U}_1$ y el vector \dot{U}_1 , para todos los valores posibles de \dot{I}_a , debe tener la misma longitud, el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_r$ debe permanecer en la circunferencia de radio U_1 y centro O . Así, por ejemplo, si el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_a$ se encuentra en el punto B , entonces el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_r$ debe encontrarse en la intersección de la perpendicular Bb a la recta AN con la circunferencia de radio U_1 . De modo que, con una corriente activa que produzca una caída de

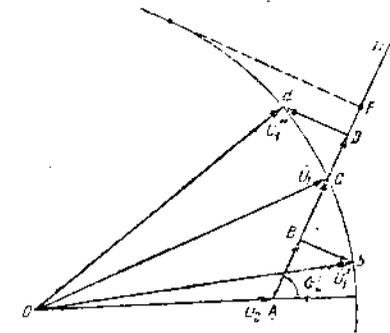


Fig. 11-4

tensión en la línea, que se determina por el vector AB , es necesario que haya una componente reactiva tal que origine una caída de tensión determinable por el vector Bb . Con ese régimen el vector $Z_1 \dot{I}_r$ retrasa respecto al vector $Z_1 \dot{I}_a$, por consiguiente la carga debe ser de tipo inductivo (la potencia reactiva es positiva).

Si el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_a$ descansa en el punto C , no debe existir corriente reactiva (la potencia reactiva es igual a cero).

Si el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_a$ descansa en el punto D , entonces el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_r$ debe situarse en el punto d . Al mismo tiempo, $Z_1 \dot{I}_r$ adelanta respecto a $Z_1 \dot{I}_a$, es decir la carga debe ser de tipo capacitivo (la potencia reactiva es negativa).

Si el extremo del vector $Z_1 \dot{I}_a$ descansa en el punto F , entonces el vector $Z_1 \dot{I}_r$ es tangente a la circunferencia de radio U_1 . Para un crecimiento ulterior de la corriente activa, la regulación de la tensión U_2 por medio de la variación de la corriente reactiva (potencia reactiva) resulta imposible y se vuelve necesario aumentar la tensión U_1 .

Las potencias activas y reactivas del receptor (conjuntamente con la reactancia regulable), en distintos regímenes, pueden determinarse del diagrama de acuerdo a los segmentos representativos de los vectores $Z_1 \dot{I}_a$ y $Z_1 \dot{I}_r$, puesto que sus longitudes para $U_2 = \text{const}$, son proporcionales a las potencias activa y reactiva respectivamente.

11-2. Condiciones para la transmisión de la potencia máxima en una línea.

Supongamos que la tensión U_1 al principio de una línea se mantenga constante y que las resistencias r_2 y la reactancia x_2 del receptor varíen. Determinemos bajo qué condiciones la potencia activa P_2 del receptor es máxima:

$$P_2 = r_2 I^2 = r^2 \frac{U_1^2}{(r_1 + r_2)^2 + (x_1 + x_2)^2} \quad (11-1)$$

Examinemos en primer lugar el caso en que la relación entre la resistencia y la reactancia del receptor se mantenga igual, es decir que $\varphi_2 = \text{const.}$ Transformemos la expresión dada para P_2 :

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{r_2 U_1^2}{r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2} = \\ &= \frac{z_2 \cos \varphi_2 U_1^2}{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + 2z_1 z_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2} = \\ &= \frac{\cos \varphi_2 U_1^2}{\frac{z_1^2}{z_2} + z_2 + 2z_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \end{aligned} \quad (11-2)$$

La potencia P_2 pasará por un máximo cuando la parte variable del denominador pase por un mínimo o sea cuando

$$\frac{d}{dz_2} \left(\frac{z_1^2}{z_2} + z_2 \right) = -\frac{z_1^2}{z_2^2} + 1 = 0;$$

es decir para $z_1 = z_2$. De tal modo que P_2 es máxima con la condición $\varphi_2 = \text{const.}$ cuando la impedancia del receptor es igual a la impedancia de la línea. En ese caso la caída de tensión en la línea es igual a la tensión en los bornes del receptor

$$U_1 = z_1 I = z_2 I = U_2.$$

Sustituyendo $z_2 = z_1$ en la (11-12) obtenemos:

$$P_{2\text{máx.}} = \frac{\cos \varphi_2 U_1^2}{2z_1 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]} \quad (11-3)$$

Examinemos ahora el caso en que sólo varía la reactancia x_2 . Entonces, como se ve de la expresión (11-1), P_2 pasará por un máximo para $x_1 + x_2 = 0$ o sea $x_2 = -x_1$. Esto sucederá en régimen de resonancia de las tensiones, cuando la reactancia inductiva de la línea esté compensada por la reactancia capacitiva del receptor. Al mismo tiempo será

$$P_{2\text{máx.}} = \frac{r_2 U_1^2}{(r_1 + r_2)^2} \quad (11-4)$$

Supongamos que la condición $x_2 = -x_1$ esté cumplida y varía la resistencia r_2 . Entonces la potencia máxima P_2 que se puede obtener en la transmisión de energía sobre una línea dada se tendrá con la condición de que

$$\frac{dP_{2\text{máx.}}}{dr_2} = 0 \quad \text{o cuando} \quad r_2 = r_1.$$

De modo que el receptor recibe la potencia máxima para $Z_2 = \dot{Z}_1$. Esa potencia máxima es

$$P_{2\text{máx.}} = \frac{U_1^2}{4r_1} \quad (11-5)$$

El rendimiento de transmisión de energía en la línea, será en este caso

$$\eta = \frac{r_2 I^2}{(r_1 + r_2) I^2} = 0,5. \quad (11-6)$$

11-3. Condiciones de transmisión de la potencia máxima de un dipolo activo a uno pasivo.

Las condiciones halladas para la transmisión de una potencia máxima en una línea pueden aplicarse al caso más general de alimentación de cualquier dipolo pasivo desde cualquier dipolo activo (fig. 11-5). Un dipolo activo puede ser considerado como una fuente de energía cuya f.e.m. es igual a la tensión existente en sus bornes en vacío, y con una resistencia interna igual a su resistencia de entrada. Resulta así que el esquema equivalente representado en la figura 11-5 en nada se distingue del esquema correspondiente a una línea y a un receptor de energía (fig. 11-10) examinado anteriormente. En este caso $U_1 = U_x$ es la tensión en vacío del dipolo activo y $Z_1 = Z_1$ y Z_2 representan las impedancias de entrada de los dipolos activo y pasivo.

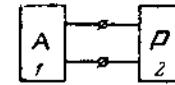


FIG. 11-5

El régimen de potencia máxima en las instalaciones electroenergéticas es desventajoso, ya que el 50% de la energía transmitida se pierde en la línea. En las distintas instalaciones de comunicación y de la automática, en que la potencia de las fuentes es reducida, se impone frecuentemente la necesidad de crear condiciones especiales para transmitir la máxima potencia posible. La disminución del rendimiento que se produce en ese caso no tiene importancia esencial dado que la cantidad de energía transmitida es generalmente insignificante.

Si $Z_2 \neq \dot{Z}_1$, se puede lograr las condiciones para transmitir una

potencia máxima, conectando las reactancias suplementarias x_3 y x_4 según los esquemas representados en la figura 11-6 (se utilizan también circuitos con transformadores y autotransformadores). Esas dos

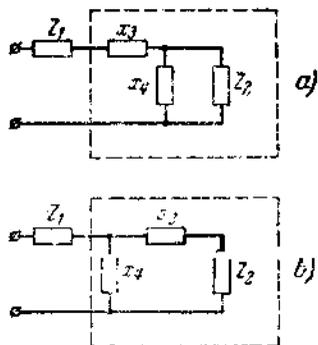


FIG. 11-6

reactancias juntamente con las resistencias del receptor forman un dipolo pasivo, cuya impedancia de entrada, para el esquema de la figura 11-6, a es:

$$Z_{2e} = jx_3 + j \frac{x_4 Z_2}{Z_2 + jx_4} = r_{2e} + jx_{2e},$$

y para el esquema de la figura 11-6, b

$$Z_{2e} = \frac{(jx_3 + Z_2)jx_4}{jx_3 + jx_4 + Z_2} = r_{2e} + jx_{2e},$$

las reactancias x_3 y x_4 se eligen de tal manera que sea:

$$r_{2e} = r_1 \quad \text{y} \quad x_{2e} = -x_1.$$

Por cuanto la modificación de la impedancia de entrada se logra mediante la aplicación de las reactancias, teóricamente ello no origina pérdidas de energía. De allí que la potencia transferida al dipolo:

$$P_{2\text{máx.}} = \frac{U_r^2}{4r_{2e}} = \frac{U_r^2}{4r_1}$$

sea al mismo tiempo la potencia en la resistencia r_2 del receptor. En la realidad no existen elementos puramente reactivos en el circuito, razón por la cual, debido a algunas pérdidas de energía en los elementos que se agregan en el circuito, la potencia del receptor será algo inferior a $P_{2\text{máx.}}$

Debe señalarse que en los circuitos de corriente continua no es posible semejante concordancia entre las resistencias de entrada. Si, por ejemplo, $r_2 < r_1$, entonces al incluirse una resistencia suplementaria r de tal magnitud que $r_2 + r$ sea igual a r_1 , no aumentará el consumo de potencia en la resistencia r_2 sino que disminuirá.

11-4. Cuadripolos pasivos.

Todas las relaciones halladas para los cuadripolos pasivos, al estudiarse en el capítulo 3 los circuitos de corriente continua, pueden aplicarse, empleando el método simbólico, a los circuitos de corriente sinusoidal.

Las ecuaciones del cuadripolo (fig. 11-7) se escriben así:

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2, \quad (11-7)$$

donde los constantes del cuadripolo A, B, C y D son complejos ligados entre sí por la relación conocida

$$AD - BC = 1. \quad (11-8)$$

En los cuadripolos simétricos $A = D$.

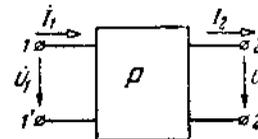


FIG. 11-7

Supongamos que en un cierto régimen las tensiones y las intensidades de las corrientes en un cuadripolo (fig. 11-7) tienen los siguientes valores:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1; \quad \dot{I}_1 = \dot{I}'_1; \quad \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 \quad \text{e} \quad \dot{I}_2 = \dot{I}'_2;$$

siendo

$$\dot{U}'_1 = A\dot{U}'_2 + B\dot{I}'_2; \quad \dot{I}'_2 = C\dot{U}'_2 + D\dot{I}'_2.$$

Si se invierten los sentidos positivos de \dot{U}_2 y de \dot{I}_2 , entonces, para el mismo régimen del cuadripolo, \dot{U}_1 e \dot{I}_1 conservarán los valores anteriores mientras que \dot{U}_2 e \dot{I}_2 tomarán valores nuevos: $\dot{U}_2 = -\dot{U}'_2$ e $\dot{I}_2 = -\dot{I}'_2$.

Para que las ecuaciones del cuadripolo den valores correctos de $\dot{U}_1 = \dot{U}'_1$ y de $\dot{I}_1 = \dot{I}'_1$, hay que hacer variar en π los argumentos de todas las constantes del cuadripolo, es decir, en lugar de las constantes A, B, C, D , tomar $-A, -B, -C$ y $-D$, entonces

$$(-A)(-\dot{U}'_2) + (-B)(-\dot{I}'_2) = A\dot{U}'_2 + B\dot{I}'_2 = \dot{U}'_1;$$

$$(-C)(-\dot{U}'_2) + (-D)(-\dot{I}'_2) = C\dot{U}'_2 + D\dot{I}'_2 = \dot{I}'_1.$$

De modo que el valor de las constantes del cuadripolo depende de la elección de los sentidos positivos de las corrientes y de las tensiones respecto a los bornes, razón por la cual deben marcarse los bornes del

cuadripolo y determinarse las constantes, eligiendo los sentidos positivos, así como, por ejemplo, se indica en la figura 11-7.

Debemos advertir que si el cálculo de los regímenes de los cuadripolos se hace sin tomar en consideración el vínculo existente entre las constantes A , B , C y D y los sentidos positivos de las corrientes y de las tensiones, ello puede traer como resultado sólo una determinación errónea del defasaje entre las tensiones, como asimismo entre las corrientes a la entrada y a la salida del cuadripolo (el error puede ser de la magnitud π) lo que muchas veces no tiene importancia. Sin embargo hay veces en que es inadmisibles el error en la determinación, cuando se trata, por ejemplo, de una conexión de cuadripolos en paralelo.

El cálculo de las constantes A , B , C y D , partiendo de los elementos del esquema dado del cuadripolo y la determinación de los elementos de los esquemas equivalentes en T y en Π se efectúa del mismo modo que para los cuadripolos en los circuitos de corriente continua con la diferencia de que debe operarse con números complejos.

Se pueden hallar las constantes del cuadripolo en función de sus impedancias de entrada, en vacío y en cortocircuito. Las relaciones entre estas magnitudes para corriente continua fueron dadas en el capítulo 3. Para la corriente sinusoidal tienen un aspecto análogo:

$$Z_{1v} = \frac{A}{C}; \quad Z_{1c} = \frac{B}{D}; \quad Z_{2v} = \frac{D}{C}; \quad Z_{2c} = \frac{B}{A}. \quad (11-9)$$

Estas impedancias de entrada están entre sí en la siguiente proporción:

$$\frac{Z_{1v}}{Z_{1c}} = \frac{Z_{2v}}{Z_{2c}}. \quad (11-10)$$

Eligiendo tres impedancias cualesquiera de las cuatro (Z_{1v} , Z_{1c} , Z_{2v} , Z_{2c}), las fórmulas (11-8) y (11-9) nos darán las constantes A , B , C y D .

La constante A es

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{Z_{1c}Z_{1v}}{Z_{2c}(Z_{1v}-Z_{1c})}} = \sqrt{\frac{Z_{1v}^2}{Z_{2v}(Z_{1v}-Z_{1c})}} = \\ &= \sqrt{\frac{Z_{1v}}{Z_{2v}-Z_{2c}}} = \sqrt{\frac{Z_{1c}Z_{2v}}{Z_{1c}(Z_{2v}-Z_{2c})}}. \end{aligned} \quad (11-11)$$

Al número complejo subradical le daremos la forma exponencial

$$\frac{Z_{1c}Z_{1v}}{Z_{2c}(Z_{1v}-Z_{1c})} = me^{j\mu}.$$

En matemáticas $\sqrt{me^{j\mu}}$ se define como un número complejo $A = ae^{j\alpha}$ tal que, al ser elevado al cuadrado, sea igual a $me^{j\mu}$, es decir $A^2 = a^2e^{j2\alpha} = me^{j\mu}$.

Los números complejos iguales tienen módulos iguales mientras que sus argumentos se pueden distinguir en un múltiplo cualquiera

de 2π , es decir $a^2 = m$ y $2\alpha = \mu + k2\pi$ donde k es un número cualquiera. De modo que

$$a = \sqrt{m} \quad \text{y} \quad \alpha = \frac{\mu}{2} + k\pi.$$

Siendo k igual a cero o a uno, obtenemos $\alpha_0 = \frac{\mu}{2}$ y $\alpha_1 = \frac{\mu}{2} + \pi$.

Todos los α_k restantes (para otros k) se distinguen de α_0 o de α_1 en un número múltiplo de 2π . De modo que, según la fórmula (11-11), se obtienen dos valores para A :

$$A_0 = \sqrt{m} e^{j\frac{\mu}{2}}; \quad A_1 = \sqrt{m} e^{-j(\frac{\mu}{2} + \pi)},$$

o también:

$$A_1 = -A_0.$$

Este doble valor se explica por el hecho de que A depende no sólo de los elementos del cuadripolo y por consiguiente no sólo de Z_{1v} , Z_{1c} , Z_{2v} y Z_{2c} sino también de la elección de los sentidos positivos de las tensiones y de las corrientes respecto a los bornes. Para obtener valores únicos de las constantes del cuadripolo hay que basarse en los datos experimentales que permiten hallar la diferencia de fases entre la tensión o la corriente a la salida del cuadripolo y la tensión o la corriente a la entrada del mismo.

Interesa el problema de las condiciones a las que debe satisfacer la resistencia de carga del cuadripolo para que el rendimiento de transmisión de energía por medio de un cuadripolo sea máximo. Pero como su análisis implica un desarrollo muy extenso, se omite aquí su exposición (Bibl. 10 y 11).

CAPÍTULO XII

CIRCUITOS CON INDUCCION MUTUA

12-1. Elementos de un circuito acoplados inductivamente.

Cuando, al variar la corriente en uno de los elementos del circuito, aparece una f.e.m. en otro elemento, se dice que estos dos elementos están acoplados inductivamente y la f.e.m. se denomina fuerza electromotriz de inducción mutua.

El grado de acoplamiento inductivo entre dos elementos de un circuito se caracteriza por el *coeficiente de acoplamiento*.

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad \text{Donde } M \text{ es la fuerza electromotriz de inducción mutua.} \quad (12-1)$$

donde M — es la inductancia mutua (o coeficiente de inducción mutua) de los elementos del circuito;

L_1 y L_2 — son las inductancias propias (o coeficientes de autoinducción) de dichos elementos.

Probaremos con un ejemplo que el coeficiente de acoplamiento es siempre menor que la unidad y estudiaremos en qué condiciones podría ser igual a la unidad.

Sean dos bobinas arrolladas en forma de anillos delgados de gran diámetro. Dada la forma de las bobinas se puede considerar, con bastante exactitud, que todas las espiras de cada bobina son concatenadas por un flujo magnético igual.

En la figura 12-1 se muestra esquemáticamente el cuadro de un campo magnético habiendo corriente sólo en la primera bobina.

Las espiras de la primera bobina son concatenadas por el flujo magnético de autoinducción Φ_{11} y en las espiras de la segunda bobina, por el flujo magnético de inducción mutua Φ_{21} . Los flujos totales de autoinducción y de inducción mutua de la primera y de la segunda bobinas respectivamente son:

$$\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11} \quad \text{y} \quad \Psi_{21} = w_2 \Phi_{21}.$$

La inductancia propia de la primera bobina y la inductancia mutua entre las bobinas se determinan por las siguientes relaciones:

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1};$$

$$M = M_{21} = \left| \frac{\Psi_{21}}{i_1} \right| = \left| \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1} \right|.$$

Haremos algunas aclaraciones al respecto.

Se ha convenido en elegir los sentidos positivos de la corriente y del flujo magnético de autoinducción, concordantes entre sí, de acuerdo a la regla del tirabuzón (o rosca derecha); por lo tanto cuando $i > 0$, también será $\Psi_{11} > 0$ y cuando $i_1 < 0$, también será $\Psi_{11} < 0$; por consiguiente la relación Ψ_{11}/i_1 siempre es positiva. En lo que se refiere al sentido positivo del flujo de inducción mutua Φ_{21} , su elección es arbitraria, de allí que la relación Ψ_{21}/i_1 puede tener cualquier signo; como en lo sucesivo consideraremos la inductancia mutua como una magnitud positiva, la expresión dada para M se anotará como valor absoluto $\left| \frac{\Psi_{21}}{i_1} \right|$.

En la figura 12-2 se muestra el cuadro esquemático del campo creado por una corriente en la segunda bobina solamente.

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{22}}{i_2};$$

$$M = M_{12} = \left| \frac{\Psi_{12}}{i_2} \right| = \left| \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2} \right|.$$

Formemos la relación

$$\frac{M_{12} M_{21}}{L_1 L_2} = \left| \frac{w_1 w_2 \Phi_{12} \Phi_{21}}{w_1 w_2 \Phi_{11} \Phi_{22}} \right| = k^2.$$

Dado que $|\Phi_{12}| < \Phi_{22}$ y $|\Phi_{21}| < \Phi_{11}$ será $k^2 < 1$. El coeficiente de acoplamiento de las dos bobinas podría ser igual a la unidad sólo en el caso de que fuera $|\Phi_{12}| = \Phi_{22}$ y $|\Phi_{21}| = \Phi_{11}$, es decir si todo el flujo creado por la corriente en una bobina se concatenara totalmente sin dispersión con las espiras de la otra bobina, cosa que sólo podría lograrse haciendo coincidir esas bobinas.

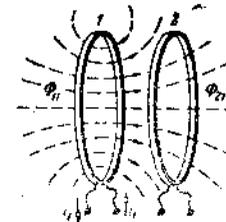


FIG. 12-1

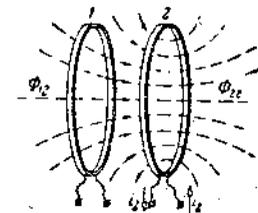


FIG. 12-2

En la práctica las espiras de dos bobinas, del mismo modo que las distintas espiras de una misma bobina son atravesadas por un número distinto de líneas magnéticas y por lo tanto siempre es $k < 1$.

La variación del acoplamiento inductivo entre las dos bobinas puede lograrse desplazando una de las bobinas respecto a la otra. Los dispositivos formados por dos bobinas que se desplazan una con respecto a la otra se llaman variómetros. El flujo Φ_{11} (fig. 12-1) se puede representar como formado por la suma de dos flujos: el flujo Φ_{21} que atraviesa la segunda bobina y el flujo de dispersión Φ_{1s} , cuyas líneas magnéticas sólo están concatenadas con la primera bobina

$$\Phi_{1s} = \Phi_{11} - \Phi_{21}$$

Análogamente, para el caso señalado en la figura 12-2, se puede introducir la noción de flujo de dispersión, cuyas líneas magnéticas sólo están concatenadas con la segunda bobina

$$\Phi_{2s} = \Phi_{22} - \Phi_{12}$$

Los flujos totales de dispersión son para los dos casos considerados

$$\Psi_{1s} = w_1 \Phi_{1s} \quad \text{y} \quad \Psi_{2s} = w_2 \Phi_{2s}$$

Se introducen correspondientemente las nociones de inductancias de dispersión de las bobinas

$$L_{1s} = \frac{\Psi_{1s}}{i_1} \quad \text{y} \quad L_{2s} = \frac{\Psi_{2s}}{i_2}$$

Establezcamos los vínculos entre las inductancias de dispersión L_{1s} y L_{2s} , con las inductancias propias L_1 y L_2 y la inductancia mutua M . A tal efecto desarrollemos las fórmulas dadas para L_{1s} y L_{2s}

$$L_{1s} = \frac{w_1 \Phi_{1s}}{i_1} = \frac{w_1 (\Phi_{11} - \Phi_{21})}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1} - \frac{w_1 \Phi_{21}}{i_1} \cdot \frac{w_2}{w_2} = L_1 - \frac{w_1}{w_2} M;$$

$$L_{2s} = \frac{w_2 \Phi_{2s}}{i_2} = \frac{w_2 (\Phi_{22} - \Phi_{12})}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{22}}{i_2} - \frac{w_2 \Phi_{12}}{i_2} \cdot \frac{w_1}{w_1} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M.$$

Si ambas bobinas son recorridas simultáneamente por las corrientes i_1 e i_2 , entonces

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \Phi_{1s} + \Phi_{21} + \Phi_{12} = \Phi_{1s} + \Phi_0;$$

$$\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21} = \Phi_{2s} + \Phi_{12} + \Phi_{21} = \Phi_{2s} + \Phi_0;$$

donde $\Phi_0 = \Phi_{21} + \Phi_{12}$ es el flujo magnético general que atraviesa todas las espiras de la primera y de la segunda bobinas.

Cuando no se puede considerar que todas las espiras de cada bobina estén concatenadas con flujos magnéticos iguales, en todas las expresiones arriba mencionadas debe entenderse bajo la designación de Φ_1 , Φ_{11} , Φ_{12} , Φ_{1s} , los flujos magnéticos equivalentes, que al concatenarse con todas las espiras de las bobinas den flujos totales Ψ_1 , Ψ_{11} , Ψ_{12} , Ψ_{1s} , etc., iguales a los que existen en la realidad.

Demostremos que la inductancia mutua de dos bobinas, dadas sus dimensiones y su posición mutua, es proporcional al producto de

los números de sus espiras. La discusión es análoga a la expuesta en el capítulo 8-12.

Supongamos que pase corriente por la primera bobina. Si se aumenta n veces el número de espiras de la segunda bobina, entonces cualquiera de los flujos magnéticos que anteriormente se concatenaba con una sola espira de la segunda bobina lo hará ahora con las n espiras. Como consecuencia, el flujo total concatenado con la segunda bobina será n veces mayor. Si luego se multiplica por m el número de espiras de la primera bobina, conservando en ella la corriente primitiva, la fuerza magnetomotriz será n veces mayor, con lo cual aumentará m veces la intensidad del campo magnético en todos los puntos del espacio circundante y m veces los flujos magnéticos que atraviesan las espiras de la segunda bobina. Como resultado, el flujo total concatenado con la segunda bobina también aumentará m veces. Resumiendo, si se multiplica por n el número de espiras de la segunda bobina y por m el de la primera, permaneciendo invariables las dimensiones de las bobinas y la corriente i_1 , el flujo de inducción mutua concatenado con la segunda bobina crecerá mn veces y por consiguiente será mn veces mayor la inductancia mutua de las bobinas. Con esto se demuestra que en las condiciones arriba mencionadas la inductancia mutua de dos bobinas es proporcional al producto de los números respectivos de sus espiras.

12-2. Fuerza electromotriz de inducción mutua.

Al variar la corriente en uno de los elementos acoplados inductivamente (fig. 12-1 y 12-2) surge en el otro elemento una f.e.m. de inducción mutua y entre sus bornes abiertos aparece una tensión. Los valores absolutos de las f.e.m. y de las tensiones, debidas a la inducción mutua, se determinan por las siguientes expresiones:

$$|u_{1M}| = |e_{1M}| = \left| \frac{d\Psi_{12}}{dt} \right| = \left| M \frac{di_2}{dt} \right|$$

y

$$|u_{2M}| = |e_{2M}| = \left| \frac{d\Psi_{21}}{dt} \right| = \left| M \frac{di_1}{dt} \right|.$$

Para facilitar el problema referente al signo de esas magnitudes se señalan con marcas especiales los bornes de los elementos acoplados inductivamente.

Dos bornes pertenecientes a dos elementos distintos acoplados inductivamente se llaman *homónimos* y se señalan con marcas iguales de acuerdo a la siguiente regla: para un mismo sentido de las corrientes respecto a los bornes homónimos, los flujos magnéticos de autoinducción y de inducción mutua de cada elemento deben sumarse.

Aplicaremos esta regla para señalar los bornes de las bobinas representadas en la figura 12-3, a. Si la corriente i_1 se dirige del borne a al b y la corriente i_2 del borne c al d, los flujos magnéticos de auto-

inducción Φ_{11} (Φ_{22}) y los de inducción mutua Φ_{12} (Φ_{21}) se suman. Por eso el borne *a* es homónimo del *c* y, análogamente, lo es el *b* del *d*.

En las bobinas de la figura 12-3, *b* resultan homónimos los bornes *a*₁ y *d*₁ como también *b*₁ y *c*₁. Este ejemplo se diferencia del anterior



FIG. 12-3

en que las espiras de la segunda bobina están arrolladas en sentido contrario al de la primera.

Para marcar los bornes homónimos se pueden utilizar las iniciales *p* y *f* "principio" y "fin" o marcas especiales para cada par de bornes homónimos, asteriscos (*), puntos, etc.

Cuando no es posible establecer la posición mutua de las bobinas y el sentido del arrollamiento de sus espiras, resulta cómodo efectuar la señalación a base de una simple experiencia para la cual se necesita un elemento galvánico (o un acumulador) y un galvanómetro. Una de las bobinas se une con el galvanómetro, la otra se conecta al ele-

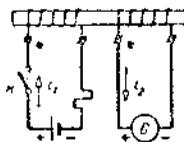


FIG. 12-4



FIG. 12-5

mento galvánico (fig. 12-4). Al cerrarse la llave *K* se origina por un breve espacio de tiempo la corriente *i*₂ que debilita el campo magnético, creado por la corriente *i*₁. Por consiguiente, en el momento de conectar la fuente de alimentación, las corrientes *i*₁ e *i*₂ tienen, respecto a los bornes homónimos, sentidos opuestos. El sentido de la corriente *i*₁ se determina por la polaridad de la fuente de alimentación. El sentido de la corriente *i*₂ lo da el desvío de corta duración de la aguja del galvanómetro. Si la aguja se desvía siguiendo la escala y no en el sentido contrario, ello indica que la corriente *i*₂ se dirige al borne positivo del galvanómetro. Al mismo tiempo, como se ve en la figura 12-4, los bornes de las bobinas conectados a los bornes positivos del galvanómetro y de la fuente de alimentación, son homónimos, como también lo son los bornes de las bobinas conectados a los bornes negativos del galvanómetro y de la fuente de alimentación (observemos que en el momento de desconectar la fuente de alimentación, la aguja del galva-

nómetro vuelve a desviarse pero en el sentido contrario, dado que la corriente *i*₂ se opone a la disminución del campo magnético).

Pasemos ahora al problema referente al signo de las f.e.m. y de las tensiones condicionadas por la inducción mutua.

Examinemos dos bobinas (fig. 12-5). Supongamos que la primera esté en circuito abierto y la segunda recorrida por una corriente *i*₂. Tomemos, para la f.e.m. *e*_{1M} y para la tensión *u*_{1M} en la primera bobina y para la corriente *i*₂ en la segunda bobina, iguales sentidos positivos respecto a los bornes homónimos, por ejemplo desde *a* hacia *b* y correspondientemente desde *c* hacia *d*.

La fuerza electromotriz *e*_{1M}, según la ley de Lenz, debe tener un sentido tal que la corriente inducida por ella se oponga a la variación del flujo magnético de inducción mutua. Por lo tanto, si $\frac{di_2}{dt} > 0$, el sentido de *e*_{1M} debe ser desde *b* hacia *a*, es decir *e*_{1M} < 0. Si $\frac{di_2}{dt} < 0$, entonces la f.e.m. *e*_{1M} debe estar dirigida desde *a* hacia *b*, o sea *e*_{1M} > 0. De modo que los signos de *e*_{1M} y de $\frac{di_2}{dt}$ son siempre contrarios, y por ello:

$$u_{1M} = -e_{1M} = M \frac{di_2}{dt};$$

$$\dot{U}_{1M} = -\dot{E}_{1M} = j\omega M \dot{I}_2. \tag{12-2}$$

Si se eligen para *e*_{1M} y *u*_{1M} en la primera bobina y para la corriente *i*₂ en la segunda bobina, sentidos positivos distintos respecto a los bornes homónimos, entonces, y siguiendo un razonamiento análogo, se puede comprobar que *e*_{1M} y $\frac{di_2}{dt}$ siempre tendrán signos iguales:

$$u_{1M} = -e_{1M} = -M \frac{di_2}{dt}$$

y

$$\dot{U}_{1M} = -\dot{E}_{1M} = -j\omega M \dot{I}_2. \tag{12-3}$$

De las expresiones (12-2) y (12-3) se ve que la tensión *U*_{1M}, de inducción mutua, está defasada respecto a la corriente *I*₂ de un ángulo $+\frac{\pi}{2}$ o bien $-\frac{\pi}{2}$. El signo de dicho ángulo depende de la elección de los sentidos positivos de *U*_{1M} e *I*₂ respecto a los bornes homónimos.

La magnitud ωM tiene las dimensiones de la resistencia y se llama *reactancia de inducción mutua*, designándosela con *x*_M. La magnitud *j* ωM se llama *impedancia compleja de inducción mutua* y se designa con *Z*_M. De modo que

$$Z_M = j\omega M = jx_M.$$

En el caso de que se tengan en un circuito más de dos elementos acoplados inductivamente, es necesario marcar en cada uno de ellos

los bornes que corresponden a sus homónimos en los elementos restantes. Se usan distintas designaciones convencionales. Aclaremos eso en el ejemplo de tres bobinas, dispuestas como está indicado en la figura 12-6.

El borne superior de la primera bobina es homónimo de los bornes inferiores de la segunda y tercera bobinas, pero estas últimas no lo son entre sí y no se puede marcarlas de la misma manera. En la

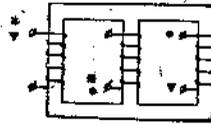


FIG. 12-6

figura 12-6 los bornes homónimos de la primera y segunda bobinas están señalados con asteriscos; los de la primera y tercera con triángulos; los de la segunda y tercera con puntos.

En casos particulares para marcar los bornes homónimos de varias bobinas podemos limitarnos a una sola designación convencional. Es fácil comprobarlo con el ejemplo de varias bobinas dispuestas a lo largo de un eje (análogamente a la figura 12-3).

12-3. Conexión en serie de receptores de energía con inductancia mutua.

Sean dos receptores de energía, con resistencias r_1 y r_2 , inductancias propias L_1 y L_2 e inductancia mutua M , conectadas en serie. Son posibles dos formas de conexión: *conexión concordante* (fig. 12-7, a) y *conexión en oposición* (fig. 12-7, b). En la *conexión concordante* las corrientes en ambos elementos del circuito tienen en un momento cualquiera iguales sentidos respecto a los bornes homónimos y por lo tanto los flujos magnéticos de autoinducción Φ_{11} (Φ_{22}) y los de inducción mutua Φ_{12} (Φ_{21}) concatenados con cada elemento se suman. En la conexión en oposición las corrientes de ambos elementos del circuito, en un momento cualquiera, tienen sentidos opuestos respecto a los bornes homónimos, razón por la cual los flujos magnéticos de autoinducción y de inducción mutua concatenados con cada elemento son siempre de signo distinto (se restan).

La inductancia del circuito formado por dos elementos acoplados inductivamente es:

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{i} \quad (12-4)$$

donde Ψ_1 y Ψ_2 son los flujos totales concatenados del primero y del segundo elementos. En la conexión concordante $\Psi_1 = L_1 i + M i$,

$\Psi_2 = L_2 i + M i$, y en la de oposición $\Psi_1 = L_1 i - M i$, $\Psi_2 = L_2 i - M i$, por consiguiente,

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M, \quad (12-5)$$

donde el signo "+" se refiere a la conexión concordante y el "-" a la de oposición.

En un caso límite de un acoplamiento ideal, para $k = 1$, tenemos $L = L_1 + L_2 \pm 2\sqrt{L_1 L_2} = (\sqrt{L_1} \pm \sqrt{L_2})^2$. Si además, $L_1 = L_2$, entonces para una conexión concordante será $L = (2\sqrt{L_1})^2 = 4L_1$, y para la de oposición $L = 0$ (para $k < 1$ es siempre $L > 0$).

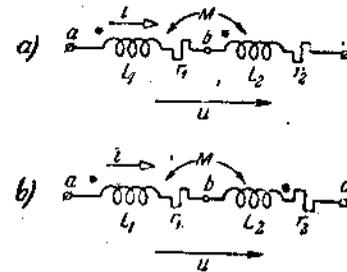


FIG. 12-7

La impedancia del circuito es mayor para la conexión concordante que para la de oposición, circunstancia que permite determinar experimentalmente los bornes homónimos de los elementos acoplados inductivamente.

Examinemos el vínculo entre la corriente i y las tensiones u_1 y u_2 en los elementos del esquema. La tensión u_1 tiene tres componentes

$$u_1 = r_1 i + u_{1L} + u_{1M},$$

donde

$$u_{1L} = -e_{1L} = L \frac{di}{dt} \quad \text{y} \quad u_{1M} = -e_{1M} = \pm M \frac{di}{dt};$$

aquí e_{1M} es la f.e.m. de inducción mutua en el primer elemento, y u_{1M} es la tensión de inducción mutua entre los bornes a y b . Los valores e_{1M} y e_{1L} como también los u_{1M} y u_{1L} tienen el mismo signo para la conexión concordante ($u_{1M} = -e_{1M} = +M \frac{di}{dt}$), y tienen sig-

nos contrarios para la conexión de oposición ($u_{1M} = -e_{1M} = -M \frac{di}{dt}$).

Sustituyendo en la expresión dada para u_1 , tenemos:

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} \quad (12-6)$$

Análogamente determinamos:

$$u_2 = r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} \pm M \frac{di}{dt} \quad (12-7)$$



Estas expresiones toman la siguiente forma compleja:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= r_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} & \text{y} \\ \dot{U}_2 &= r_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I}.\end{aligned}\quad (12-8)$$

Si la inductancia propia de uno de los elementos es menor que

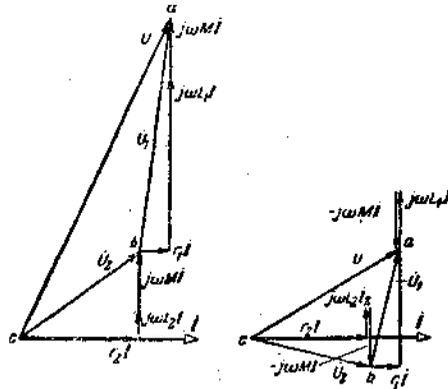


FIG. 12-3

la mutua, se observará en la conexión de oposición un efecto singular de "capacidad". Sea $L_2 < M$, entonces en la expresión

$$\dot{U}_2 = r_2 \dot{I} + j\omega(L_2 - M)\dot{I}$$

tendremos $\omega(L_2 - M) < 0$ y, por consiguiente, la tensión \dot{U}_2 se retrasará en fase respecto a la corriente \dot{I} , como en el caso de la reactancia capacitiva. Por cierto que todo el circuito en su totalidad tiene una reactancia inductiva, puesto que $L = L_1 + L_2 - 2M > 0$ y la corriente \dot{I} está en atraso de fase respecto a la tensión \dot{U} . En la figura 12-8 se muestran los diagramas vectoriales para las conexiones concordante y de oposición, con el mismo valor de la corriente en ambos casos.

Hallamos la impedancia compleja del circuito, tomando en cuenta la (12-8):

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{\dot{I}} = Z_1 + Z_2 \pm 2Z_M; \quad (12-9)$$

donde

$$Z_1 = r_1 + j\omega L_1, \quad Z_2 = r_2 + j\omega L_2, \quad Z_M = j\omega M.$$

12-4. Conexión en paralelo de receptores de energía con inductancia mutua.

Sean dos receptores de energía, con resistencias r_1 y r_2 , inductancias L_1 y L_2 y la inductancia mutua M , conectados en paralelo.

Veamos primero el caso en que los bornes homónimos están co-

nectados al mismo nudo (fig. 12-9). Para los sentidos positivos elegidos de las corrientes y de las tensiones será

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2; \quad (12-10)$$

$$\dot{U} = Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2; \quad (12-11)$$

$$\dot{U} = Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2; \quad (12-12)$$

donde $Z_1 = r_1 + j\omega L_1$, $Z_2 = r_2 + j\omega L_2$, $Z_M = j\omega M$.

En esas ecuaciones las tensiones complejas $j\omega M \dot{I}_1$ y $j\omega M \dot{I}_2$ están tomadas con el signo más, dado que los sentidos positivos de esas



FIG. 12-9

tensiones (de arriba hacia abajo) y de las corrientes de las que aquellas dependen, están orientadas del mismo modo respecto a los bornes homónimos.

Resolviendo las ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}; & \dot{I}_2 &= \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U}; \\ \dot{I} &= \frac{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U};\end{aligned}\quad (12-13)$$

de donde se deduce que la impedancia de entrada del circuito considerado es

$$Z = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 - 2Z_M}. \quad (12-14)$$

Para $Z_M = 0$, es decir no habiendo vínculo inductivo entre las ramas, esa expresión adquiere una forma conocida:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Veamos ahora una conexión en que los bornes homónimos están conectados a distintos nudos.

Supongamos ahora que a diferencia de lo indicado en la figura 12-9, L_1 y L_2 estén conectados con el nudo por sus bornes de distinto nombre; entonces los sentidos positivos de las tensiones de inducción mutua (elegidos de arriba abajo) y de las corrientes respectivas, estarán orientados desigualmente respecto a los bornes homónimos y por lo tanto los complejos $j\omega M \dot{I}_1$ y $j\omega M \dot{I}_2$ entrarán en las ecuaciones (12-11) y (12-12) con el signo menos. Las \dot{I}_1 , \dot{I}_2 e \dot{I} se expresarán por fórmulas análogas a las (12-13) con la diferencia de

que Z_M se reemplazará por $-Z_M$, y la impedancia de entrada del circuito será

$$Z = \frac{Z_1 Z_2 - Z_M^2}{Z_1 + Z_2 + 2Z_M} \quad (12-15)$$

12-5. Cálculo de los circuitos ramificados con inductancia mutua.

Los cálculos pueden efectuarse partiendo de las ecuaciones formadas de acuerdo a la primera y a la segunda ley de Kirchhoff o por el método de las intensidades de malla. El método de los nudos no conviene debido a que la corriente en cualquier rama dada del esquema depende no sólo de la f.e.m. de la fuente de tensión perteneciente al esquema y de los potenciales de aquellos nudos a los que está unida dicha rama, sino también de las corrientes de otras ramas que inducen en la rama dada, una f.e.m. de inducción mutua. Esta circunstancia no permite expresar las intensidades de las corrientes de las ramas simplemente en función de los potenciales de los nudos y de las f.e.m. de las fuentes de tensión como se hacía antes.

Se puede aplicar para los cálculos el teorema del dipolo activo, si bien, al proceder así, el circuito exterior respecto al dipolo, no debe estar inductivamente acoplado con aquel circuito que forma parte del dipolo activo.

Se comprende que no se puede recurrir a las fórmulas deducidas anteriormente para la transformación de los triángulos de resistencias en estrellas equivalentes y viceversa.

Para poder salvar las restricciones arriba indicadas en la aplicación de los métodos de cálculo, suele resultar conveniente excluir los vínculos inductivos sustituyendo aquellas partes del esquema que los contienen por otros equivalentes sin acoplamientos inductivos (ver apartado siguiente).

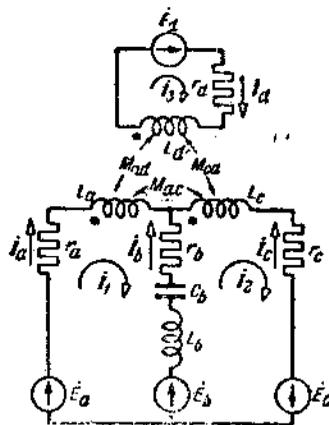


FIG. 12-10

Al establecer las ecuaciones según la segunda ley de Kirchhoff, las f.e.m. de inducción mutua se consideran como las tensiones correspondientes. El signo de la tensión compleja $\pm j\omega M_{KS} \dot{I}_S$ en el elemento K se determina confrontando el sentido del recorrido en el elemento K con el sentido positivo de la corriente en el elemento S. Si estos sentidos son iguales respecto a los bornes homónimos, entonces la tensión es igual a $+j\omega M_{KS} \dot{I}_S$. Si esos sentidos respecto a los bornes homónimos son opuestos, entonces la tensión es $-j\omega M_{KS} \dot{I}_S$.

Esta regla de los signos deriva del análisis detallado expuesto en el subcapítulo 12-2.

Como ejemplo se desarrollan más abajo las ecuaciones, formadas de acuerdo a las leyes de Kirchhoff para el esquema de la figura 12-10 con los sentidos positivos de la corriente elegidos arbitrariamente. Para mayor claridad las tensiones están anotadas en el orden en que están dispuestos los elementos en cada malla y no están reducidos los términos semejantes.

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0,$$

$$r_a \dot{I}_a + j\omega L_a \dot{I}_a - j\omega M_{ac} \dot{I}_c - j\omega M_{ad} \dot{I}_d - r_b \dot{I}_b + j \frac{\dot{I}_b}{\omega C_b} - j\omega L_b \dot{I}_b = \dot{E}_a - \dot{E}_b;$$

$$j\omega L_a \dot{I}_b - j \frac{\dot{I}_b}{\omega C_b} + r_b \dot{I}_b - j\omega L_c \dot{I}_c + j\omega M_{ac} \dot{I}_a - j\omega M_{cd} \dot{I}_d - r_c \dot{I}_c = \dot{E}_b + \dot{E}_c,$$

$$r_d \dot{I}_d + j\omega L_d \dot{I}_d - j\omega M_{ad} \dot{I}_a + j\omega M_{cd} \dot{I}_c = \dot{E}_d.$$

Establezcamos también a continuación las ecuaciones de acuerdo a la segunda ley de Kirchhoff para las intensidades de malla.

$$\left[r_a + r_b + j \left(\omega L_a + \omega L_b - \frac{1}{\omega C_b} \right) \right] \dot{I}_1 + \left[-r_b + j \left(-\omega L_b + \frac{1}{\omega C_b} + \omega M_{ac} \right) \right] \dot{I}_2 - j\omega M_{ad} \dot{I}_3 = \dot{E}_a - \dot{E}_b;$$

$$\left[-r_b + j \left(-\omega L_b + \frac{1}{\omega C_b} + \omega M_{ac} \right) \right] \dot{I}_1 +$$

$$\left[r_b + r_c + j \left(\omega L_b + \omega L_c - \frac{1}{\omega C_b} \right) \right] \dot{I}_2 - j\omega M_{cd} \dot{I}_3 = \dot{E}_b + \dot{E}_c;$$

$$-j\omega M_{ad} \dot{I}_1 - j\omega M_{cd} \dot{I}_2 + (r_d + j\omega L_d) \dot{I}_3 = \dot{E}_d.$$

Estas últimas ecuaciones se pueden anotar en forma abreviada de la siguiente manera:

$$Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 + Z_{13} \dot{I}_3 = \dot{E}_1;$$

$$Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 + Z_{23} \dot{I}_3 = \dot{E}_2;$$

$$Z_{31} \dot{I}_1 + Z_{32} \dot{I}_2 + Z_{33} \dot{I}_3 = \dot{E}_3.$$



donde Z_{11} , Z_{22} , Z_{33} son las impedancias complejas de las mallas 1, 2 y 3; $Z_{12} = Z_{21}$, $Z_{23} = Z_{32}$, $Z_{31} = Z_{13}$ son las impedancias complejas comunes a las mallas 1 y 2, 2 y 3, 3 y 1.

\dot{E}_1 , \dot{E}_2 , \dot{E}_3 son las f.e.m. complejas de malla. Por ejemplo,

$$Z_{11} = r_a + r_b + j\left(\omega L_a + \omega L_b - \frac{1}{\omega C_b}\right);$$

$$Z_{12} = -r_b + j\left(-\omega L_b + \frac{1}{\omega C_b} + \omega M_{ac}\right);$$

$$Z_{13} = -j\omega M_{ad}; \quad \dot{E}_1 = \dot{E}_a - \dot{E}_b.$$

Observemos que tanto en las impedancias complejas de las mallas como en las impedancias complejas comunes a dos mallas, las expresiones dadas para las impedancias de inducción mutua $j\omega M_{KS}$ entran con el signo más o el signo menos según que el sentido del recorrido de la malla a través del elemento K y el sentido positivo de la corriente a través del elemento S , coincidan o no, respecto a los bornes homónimos de los elementos del circuito K y S .

Para los circuitos que contienen elementos acoplados inductivamente, es válida la propiedad recíproca. La demostración de esa proposición en nada se distingue de la demostración respectiva correspondiente a los circuitos de corriente continua.

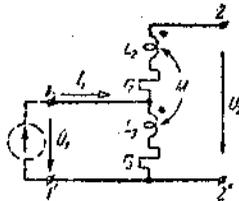


FIG. 12-11

Problema 12-1. La alimentación se efectúa por los bornes 1-1' (fig. 12-11). Determinar la tensión entre los bornes abiertos 2-2'. Están dadas: $r_2 = r_3 = 3 \Omega$, $\omega L_2 = \omega L_3 = 4 \Omega$, $\omega M = 2 \Omega$, $U_1 = 10 \text{ V}$.

Solución. Admitimos que $\dot{U}_1 = U_1 = 10 \text{ V}$. Hallamos:

$$\dot{i}_1 = \frac{U_1}{r_3 + j\omega L_3} = \frac{10}{3 + j4} = 1,2 - j1,6 \text{ A.}$$

Determinamos la tensión U_2 recorriendo el esquema desde el borne 2 al borne 2'.

$$\dot{U}_2 = j\omega M \dot{i}_1 + \dot{U}_1 = j2(1,2 - j1,6) + 10 = 13,4 \angle 10^\circ 18'.$$

Si el extremo inferior del elemento L_2 fuera homónimo del extremo superior del L_3 , el sentido del recorrido del elemento L_2 , y el sentido de la corriente

en el elemento L_3 respecto a los bornes homónimos serían distintos y entonces la expresión $j\omega M \dot{i}_1$ llevaría signo menos y la tensión \dot{U}_2 sería igual a $7,21 \angle -19^\circ 26' \text{ V}$.

Problema 12-2. Determinar la impedancia de entrada de un circuito cuyo esquema está representado en la figura 12-12. Datos: r_1 , r_3 , ωL_1 , ωL_3 y ωM .

Solución. Propongámonos la tensión \dot{U}_1 , calculemos la intensidad \dot{i}_1 y luego hallemos $Z_e = \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1}$.

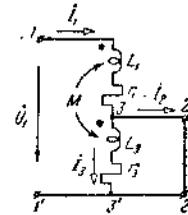


FIG. 12-12

Observemos que de no haber inductancia mutua, la corriente \dot{i}_3 sería igual a cero, la \dot{i}_2 sería igual a \dot{i}_1 y Z_e sería igual a $r_1 + j\omega L_1$.

Para la malla 1-3-2-2'-1', tenemos:

$$(r_1 + j\omega L_1)\dot{i}_1 + j\omega M \dot{i}_3 = \dot{U}_1. \quad (a)$$

Para la rama 3-3'

$$(r_3 + j\omega L_3)\dot{i}_3 + j\omega M \dot{i}_1 = 0, \quad (b)$$

de donde

$$\dot{i}_3 = -\frac{j\omega M \dot{i}_1}{r_3 + j\omega L_3}. \quad (c)$$

Sustituimos la (c) en la (a)

$$\left(r_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_3 + j\omega L_3}\right)\dot{i}_1 = \dot{U}_1,$$

de donde

$$Z_e = \frac{\dot{U}_1}{\dot{i}_1} = r_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_3 + j\omega L_3}.$$

12-6. Sustitución equivalente de los acoplamientos inductivos.

En muchos casos el análisis y el cálculo de los circuitos se pueden simplificar, siempre que se reemplace la parte del esquema con acoplamientos inductivos por un esquema equivalente que no los contenga. Esta operación se llama sustitución equivalente, eliminación o desenlace de acoplamientos inductivos.

Hallemos un esquema sin vínculos inductivos, equivalente a un circuito con dos elementos acoplados inductivamente y que concurren a un nudo común (fig. 12-13). Deben preverse dos casos: cuando los elementos del circuito están unidos en el nudo por sus

bornes homónimos o cuando lo están por sus bornes de distinto nombre. Escribamos las expresiones de la tensión entre los bornes 1, 2 y 3.

$$\dot{U}_{13} = Z_1 \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_{23} = Z_2 \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_1;$$

Los signos de arriba se refieren al primer caso (cuando los elementos del circuito están conectados por sus bornes homónimos) y los de abajo, al segundo caso. Nos atenderemos a esa disposición de los signos en todas las expresiones sucesivas.

Utilizando la relación $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$, eliminemos de la primera ecuación la intensidad \dot{I}_2 y de la segunda la intensidad \dot{I}_1 , entonces obtendremos:

$$\dot{U}_{13} = (Z_1 \mp Z_M) \dot{I}_1 \pm Z_M \dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_{23} = (Z_2 \mp Z_M) \dot{I}_2 \pm Z_M \dot{I}_3.$$

Además, tenemos:

$$\dot{U}_{12} = (Z_1 \mp Z_M) \dot{I}_1 - (Z_2 \mp Z_M) \dot{I}_2.$$

Estas tres ecuaciones son válidas para el esquema representado en la figura 12-14, el cual constituye así el esquema equivalente buscado sin acoplamientos inductivos.



FIG. 12-13

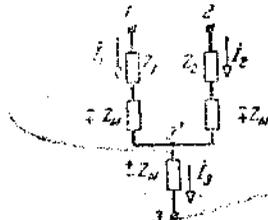


FIG. 12-14

Resulta así que al eliminar el vínculo inductivo, se agrega a las impedancias Z_1 y Z_2 la $\mp Z_M$; el borne 3 deja de ser nudo de las ramas 1 y 2 y entre el borne 3 y el nuevo nudo 3' aparece el elemento $\pm Z_M$.

Pasemos ahora a examinar los ejemplos de aplicación del esquema equivalente.

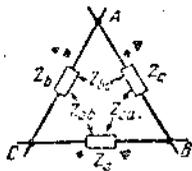


FIG. 12-15

Supongamos que en el esquema del triángulo (fig. 12-15) todas las ramas estén acopladas inductivamente entre sí. Las impedancias complejas de inducción mutua están designadas con Z_{ab} , Z_{bc} , Z_{ca} (el subíndice "M" que se aplica generalmente en esos casos, para abreviar la anotación se ha omitido). Hallemos el esquema equivalente sin vínculos inductivos. Los elementos Z_b y Z_c están conectados al nudo A por medio de sus bornes homónimos, razón por la cual al eliminar la impedancia mutua Z_{bc} , a las impedancias Z_b y Z_c debe agregárseles

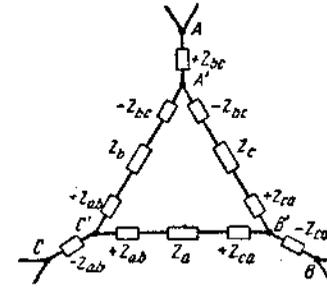


FIG. 12-16

$-Z_{bc}$ y, entre el nudo A y el nuevo nudo A', intercalar el elemento $+Z_{bc}$ (fig. 12-16). Los elementos Z_c y Z_a están conectados con el nudo B por sus bornes de distinto nombre; por ello es que al eliminar la impedancia mutua Z_{ca} hay que agregar a las impedancias Z_c y Z_a la $+Z_{ca}$ e intercalar el elemento $-Z_{ca}$ entre el nudo B y el nuevo nudo B'. Análogamente se transforma el esquema al eliminarse la impedancia mutua Z_{ab} . El triángulo de impedancias obtenido entre los nudos A', B' y C' (fig. 12-12) se puede transformar de la manera usual en una estrella.

Encontremos el esquema sin vínculos inductivos, equivalente al esquema de una estrella de tres puntas (fig. 12-17) cuyas ramas estén todas acopladas inductivamente entre sí.

Iremos eliminando sucesivamente las impedancias mutuas, atendiendo a la disposición de los bornes homónimos.

Al eliminar Z_{31} , agregaremos $-Z_{31}$ a la Z_1 y a la Z_3 , y agregaremos la $+Z_{31}$ a la Z_2 . Para eliminar Z_{12} , agregaremos la $+Z_{12}$ a la Z_1 y a la Z_2 y la $-Z_{12}$ a la Z_3 . Finalmente, para suprimir Z_{23} , añadiremos $+Z_{23}$ a la Z_2 y a la Z_3 , como asimismo la $-Z_{23}$ a la Z_1 . Como resultado tendremos el esquema equivalente buscado, que se puede ver en la figura 12-18.

Debe recordarse que el esquema de la figura 12-18 es equivalente al de la figura 12-17 en el sentido de que uno de ellos puede ser reemplazado por el otro sin perturbar el régimen del resto del circuito, no sujeto a transformación. En una transformación de ese tipo se conservan los potenciales ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 de las puntas de la estrella y no

varían las corrientes que entran en la estrella aunque los potenciales φ_0 y φ_{01} de los nudos de las estrellas en un caso general se distinguen, por supuesto, uno del otro. La estrella de impedancias (fig. 12-18) puede ser transformada por el método corriente en un triángulo.

Hacer desaparecer los vínculos inductivos en una estrella de cuatro puntas implica un problema más difícil que el de la estrella de tres puntas, dado que en la etapa intermedia se obtiene un esquema en el cual los elementos acoplados inductivamente se encuentran dispues-

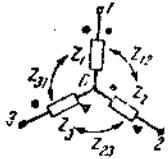


Fig. 12-17

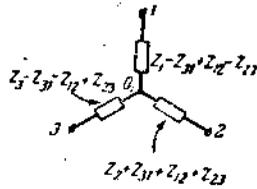


Fig. 12-18

tos en ramas que no tienen nudo común. Dos ramas cualesquiera acopladas inductivamente, que no tienen nudo común pueden ser reemplazadas por un esquema equivalente sin vínculo inductivo; sin embargo ese esquema es bastante complejo y no es conveniente recurrir a él (ver Bibl. 6).

12-7. Transferencia de la energía entre los elementos de un circuito acoplados inductivamente.

Examinemos dos elementos de un circuito ramificado acoplados inductivamente. Representemos todo el circuito, excepción hecha de esos dos elementos, por un cuadripolo activo (fig. 12-19). En el transcurso de cada semiperíodo de variación de las corrientes i_1 e i_2 , la energía que pasa al campo magnético de los elementos acoplados inductivamente, regresa de allí.

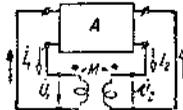


Fig. 12-19

Sin embargo, esto no significa que la cantidad de energía que pasa al campo sea igual a la devuelta por él para cada elemento por separado. Más adelante se demostrará que, para una diferencia de fase distinta de 0 y de π , entre las corrientes i_1 e i_2 la energía que pasa al campo magnético desde uno de los elementos es mayor de la que vuelve; en cambio, desde el otro elemento pasa menos energía de

la que regresa. Como resultado se observa una transferencia de energía de un elemento a otro. Sean

$$\dot{i}_1 = I_1 e^{j\psi_1}, \quad e \quad \dot{i}_2 = I_2 e^{j\psi_2}.$$

Formemos las expresiones para las potencias complejas del primero y del segundo elementos, debidas a la inducción mutua.

$$\begin{aligned} \dot{S}_{1M} &= \dot{U}_{1M} \dot{I}_1 = j\omega MI_2 \dot{I}_1 = j\omega MI_2 I_1 e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = \\ &= -\omega MI_2 I_1 \sin(\psi_2 - \psi_1) + j\omega MI_2 I_1 \cos(\psi_2 - \psi_1); \end{aligned}$$

$$\dot{S}_{2M} = \dot{U}_{2M} \dot{I}_2 = j\omega MI_1 \dot{I}_2 = -\dot{S}_{1M},$$

de donde tenemos

$$P_{1M} = -P_{2M} = \omega MI_1 I_2 \sin(\psi_1 - \psi_2); \quad (12-16)$$

$$Q_{1M} = Q_{2M} = \omega MI_1 I_2 \cos(\psi_1 - \psi_2). \quad (12-17)$$

Para los sentidos positivos de las corrientes y de las tensiones, indicados en el esquema, los valores positivos de las potencias corresponden al flujo de energía desde el resto del circuito hacia los elementos examinados, mientras que los valores negativos de las potencias corresponden al paso de la energía desde dichos elementos al circuito.

La potencia activa total condicionada por la inducción mutua, y que llega a ambos elementos, es igual a cero, $P_{1M} + P_{2M} = 0$; la potencia reactiva debida a la inducción mutua, es por lo general distinta de cero y puede tener un valor positivo como negativo.

Si $\pi > \psi_1 - \psi_2 > 0$ entonces $P_{1M} > 0$ y $P_{2M} < 0$. En tal caso se produce la transferencia de energía desde el circuito al campo magnético a través del primer elemento y su regreso al circuito a través del segundo elemento.

Si $\pi > \psi_2 - \psi_1 > 0$ entonces $P_{2M} > 0$ y $P_{1M} < 0$. En tal caso la energía llega desde el circuito al campo magnético a través del segundo elemento y vuelve al circuito a través del primero.

Problema 12-3. El circuito consta de dos bobinas acopladas inductivamente, conectadas en paralelo (fig. 12-20, a). Están dadas: $r_1 = 20 \Omega$, $x_{L1} = 80 \Omega$, $r_2 = 30 \Omega$, $x_{L2} = 50 \Omega$, $\omega M = 40 \Omega$, $\dot{U} = 120 + j20 \text{ V}$. Se quieren determinar las potencias, medidas por los vatímetros y efectuar el análisis de los procesos energéticos en el circuito.

Solución. Establecemos las ecuaciones (12-10), (12-11) y (12-12) y hallamos su solución (12-13).

Sustituyendo los datos numéricos

$$Z_1 = 20 + j80 \Omega; \quad Z_2 = 30 + j50 \Omega;$$

$$Z_M = j40 \Omega \quad \text{y} \quad \dot{U} = 120 + j20 \text{ V},$$

obtenemos

$$\dot{I}_1 = \frac{Z_2 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U} = -j = 1 \angle -90^\circ \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_1 - Z_M}{Z_1 Z_2 - Z_M^2} \dot{U} = 1 - j = \sqrt{2} \angle -45^\circ \text{ A};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 1 - j2 \text{ A}.$$

Los circuitos de conexión de los vatímetros son tales que éstos miden las potencias P , P_1 y P_2 de entrada de la energía a todo el circuito considerado y en cada bobina por separado.

$$P = \text{Re}[\dot{U}\dot{I}] = \text{Re}[(120 + j20)(1 - j2)] = 80 \text{ W};$$

$$P_1 = \text{Re}[\dot{U}\dot{I}_1] = \text{Re}[(120 + j20)(+j)] = -20 \text{ W};$$

$$P_2 = \text{Re}[\dot{U}\dot{I}_2] = \text{Re}[(120 + j20)(1 + j)] = 100 \text{ W}.$$

Los resultados del cálculo de P , P_1 y P_2 prueban que la potencia P que pasa a todo el circuito considerado desde la fuente de alimentación es menor que la potencia transferida sólo a la segunda bobina. En cambio la primera bobina no

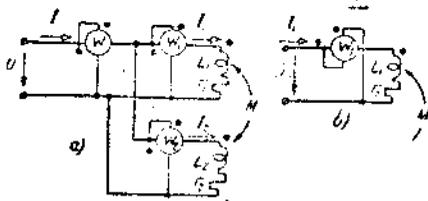


FIG. 12-20

consume sino que entrega potencia. La aguja del primer vatímetro debe desviarse en el sentido contrario al de la escala. Para medir la potencia que entrega la primera bobina hay que modificar el esquema de conexión del vatímetro W_1 . Se puede, por ejemplo, variar la conexión del circuito de tensión, uniendo el borne marcado con asterisco al conductor inferior, y el borne sin asterisco al con-

ductor superior, como lo indica la figura 12-20, *b*. Entonces, el vatímetro medirá la potencia que entrega la bobina:

$$P_1 = U_W I_W \cos \angle \dot{U}_W, \dot{I}_W,$$

donde

$$U_W = -\dot{U} = -120 - j20 \text{ V}; \quad I_W = \dot{I}_1;$$

$$P_1 = \text{Re}[-\dot{U}\dot{I}_1] = \text{Re}[(-120 - j20)(+j)] = 20 \text{ W}.$$

La suma de las potencias que entregan la fuente de alimentación y la primera bobina es igual a la potencia que pasa a la segunda bobina. De toda la potencia, $P_2 = 100 \text{ W}$, que entra en la segunda bobina, una parte de la misma, igual a

$$r_2 I_2^2 = 30(\sqrt{2})^2 = 60 \text{ W}$$

se transforma en calor. La parte restante

$$P_2 - r_2 I_2^2 = 100 - 60 = 40 \text{ W},$$

evidentemente pasa al campo magnético y luego, desde éste, a la primera bobina. Vamos a demostrarlo:

$$\dot{U}_{1M} = j\omega M \dot{I}_2 = j40(1 - j) = 40 + j40 \text{ V};$$

$$\dot{U}_{2M} = j\omega M \dot{I}_1 = j40(-j) = 40 \text{ V}.$$

La potencia que recibe la segunda bobina desde el circuito a expensas de la inducción mutua y que es entregada al campo magnético, es

$$P_{2M} = \text{Re}[\dot{U}_{2M}\dot{I}_2] = \text{Re}[40(1 + j)] = 40 \text{ W},$$

es decir

$$P_{2M} = P_2 - r_2 I_2^2.$$

La potencia que recibe la primera bobina a expensas de la inducción mutua es

$$P_{1M} = \text{Re}[\dot{U}_{1M}\dot{I}_1] = \text{Re}[(40 + j40)(+j)] = -40 \text{ W}.$$

$P_{1M} < 0$, es decir esa potencia llega desde el campo magnético y es igual a la potencia P_{2M} que pasó al campo magnético desde la segunda bobina. Parte de esa potencia se transforma en calor en la primera bobina

$$r_1 I_1^2 = 20 \cdot 1^2 = 20 \text{ W}$$

y el resto

$$(-P_{1M}) - r_1 I_1^2 = 20 \text{ W},$$

vuelve al circuito.

La potencia transferida al circuito desde la fuente de alimentación, es igual a la potencia que se transforma en calor

$$P = r_1 I_1^2 + r_2 I_2^2 = 60 + 20 = 80 \text{ W}.$$

Para el circuito analizado se da el diagrama vectorial de las corrientes y de las tensiones en la figura 12-20, *c*.

La diferencia de fases de \dot{U} e \dot{I}_1 es mayor que $\frac{\pi}{2}$, razón por la cual $P_1 < 0$. En el diagrama se indican con líneas de puntos las componentes activas de las

tensiones, debidas a la inducción mutua \dot{U}_{1M} y \dot{U}_{2M} . La componente \dot{U}_{2Ma} está en fase con \dot{I}_2 , mientras que la componente \dot{U}_{1Ma} se encuentra en oposición de fase con \dot{I}_1 , razón por la cual $P_{2M} > 0$ y $P_{1M} < 0$.

12-8. Ley de conservación de las potencias reactivas.

Demostraremos que para cualquier circuito eléctrico, la suma de las potencias reactivas entregadas (generadas) es igual a la suma de las potencias reactivas consumidas. Este enunciado se llama ley de conservación o equilibrio de las potencias reactivas. Examinemos un circuito eléctrico ramificado, tan complejo como sea. Todas sus partes independientes, formadas por mallas y que tienen con el resto de la red sólo vínculos inductivos, descompongámoslas en pares de ramas, introduciendo en cada malla dos nudos (fig. 12-21). Sea n el número total de los nudos del circuito, incluso los introducidos en las mallas. Escribamos para cada uno de los n nudos las ecuaciones complejas conjugadas, según la primera ley de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{12} + \dot{I}_{13} + \dots + \dot{I}_{1n} &= 0 | \dot{\varphi}_1; \\ \dot{I}_{21} + \dot{I}_{23} + \dots + \dot{I}_{2n} &= 0 | \dot{\varphi}_2; \\ \dots & \\ \dot{I}_{n1} + \dot{I}_{n2} + \dots + \dot{I}_{n,n-1} &= 0 | \dot{\varphi}_n. \end{aligned} \tag{12-18}$$

Esas ecuaciones están anotadas en su forma general en el supuesto de que cada nudo esté unido por medio de ramas con los $(n-1)$ nudos restantes. Faltando unas u otras ramas, los sumandos correspondientes desaparecen de las ecuaciones mientras que en presencia de varias ramas entre cualquier par de nudos, el número de sumandos aumenta correspondientemente. Así, por ejemplo, para los nudos p y q de la malla (fig. 12-21), las ecuaciones contienen dos sumandos:

$$\dot{I}'_{pq} + \dot{I}''_{pq} = 0; \quad \dot{I}'_{qp} + \dot{I}''_{qp} = 0.$$

Multipliquemos cada una de las ecuaciones (12-18) por el potencial complejo del nudo correspondiente y luego sumemos todas las

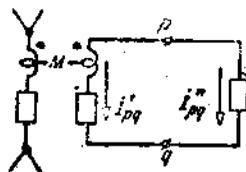


FIG. 12-21

ecuaciones. Tomémos en cuenta al mismo tiempo que las corrientes complejas conjugadas de todas las ramas intervienen dos veces en esas ecuaciones para dos sentidos distintos, siendo $\dot{I}_{21} = -\dot{I}_{12}$; $\dot{I}_{31} = -\dot{I}_{13}$, etcétera. Como resultado tendremos:

$$(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)\dot{I}_{12} + (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_3)\dot{I}_{13} + \dots + (\dot{\varphi}_{n-1} - \dot{\varphi}_n)\dot{I}_{n-1,n} = 0,$$

es decir la suma de las potencias complejas consumidas en todas las ramas del circuito es igual a cero (todos los sumandos representan potencias complejas consumidas y no entregadas porque se calculan para sentidos positivos iguales de la corriente y de la tensión). Siendo igual a cero la suma de los complejos, es igual a cero la suma algebraica de sus partes reales y lo es también la de sus partes imaginarias, es decir, en este caso tenemos que son iguales a cero las sumas algebraicas de las potencias activas y reactivas consumidas en todas las ramas del circuito. Dado que las potencias consumidas negativas representan potencias entregadas, de aquí deriva la formulación de la ley de conservación de las potencias reactivas, enunciada al principio de este párrafo.

12-9. Transformador sin núcleo de acero (transformador en aire).

En electrotecnia se suele transmitir con frecuencia la energía de una malla determinada de un circuito a otra por medio de la inducción electromagnética. Esto se efectúa mediante aparatos especiales llamados transformadores, que pueden ser destinados a distintos fines pero que habitualmente se aplican a la transformación de las magnitudes de las corrientes y de las tensiones alternas. La necesidad de efectuar tales transformaciones surge cuando la tensión de la fuente de energía es distinta de la tensión requerida en el receptor.

Los transformadores constan de dos o de varias bobinas, devanados o arrollamientos acoplados inductivamente. Nos limitaremos a estudiar el transformador más simple, de dos devanados, que no contiene núcleo ferromagnético. Tales transformadores se aplican para altas

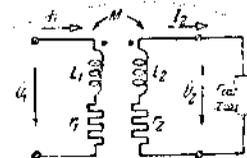


FIG. 12-22

frecuencias, como también para bajas frecuencias en una serie de dispositivos especiales de medición. El devanado del transformador que recibe la alimentación, se llama *primario*; aquel al que se une el receptor de energía (la carga) es el *secundario*. Las tensiones entre los

bornes de los devanados y las corrientes que los recorren se llaman *tensiones y corrientes primarias y secundarias del transformador*, respectivamente. A su vez los circuitos de los cuales forman parte los devanados primario y secundario del transformador, se llaman *circuitos primario y secundario* respectivamente.

Si despreciamos la capacidad repartida entre las espiras de los arrollamientos, el circuito formado por un transformador de dos devanados y por una carga, podrá representarse por el esquema de la figura 12-22.

Introducamos las siguientes designaciones:

$$\omega L_1 = x_1, \quad r_2 + r_{car} = r_{22}, \quad \omega L_2 + x_{car} = x_{22},$$

donde r_{22} y x_{22} son la resistencia y la reactancia de la malla secundaria.

Las ecuaciones según la segunda ley de Kirchoff para las mallas primaria y secundaria serán:

$$\begin{aligned} r_1 \dot{I}_1 + jx_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 &= \dot{U}_1, \\ r_{22} \dot{I}_2 + jx_{22} \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 &= 0. \end{aligned} \quad (12-19)$$

Construyamos el diagrama vectorial de las corrientes y de las tensiones para los circuitos primario y secundario. Propongámonos una corriente \dot{I}_2 y tracemos los vectores $r_{car} \dot{I}_2$, $jx_{car} \dot{I}_2$, $r_2 \dot{I}_2$ y $j\omega L_2 \dot{I}_2$ (fig. 12-23). En el ejemplo estudiado se tomó $x_{car} > 0$. Uniendo el extremo del vector $j\omega L_2 \dot{I}_2$ con el origen del diagrama vectorial, obtenemos el vector $-j\omega M \dot{I}_1$. Dividiendo la tensión $\omega M \dot{I}_1$ por ωM , determinamos el valor de la corriente \dot{I}_1 .

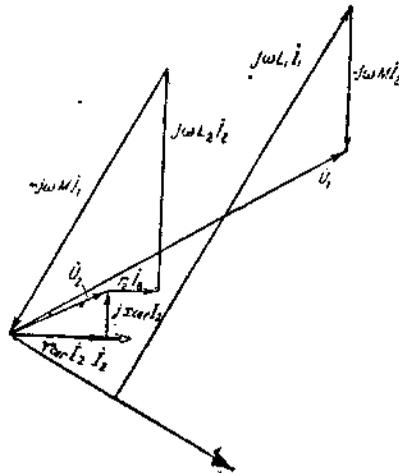


FIG. 12-23

Coloquemos el vector \dot{I}_1 bajo un ángulo $+\frac{\pi}{2}$ respecto al vector $-j\omega M \dot{I}_1$. Luego tracemos los vectores $r_1 \dot{I}_1$, $j\omega L_1 \dot{I}_1$ y $-j\omega M \dot{I}_2$. Su suma nos da el vector de tensión \dot{U}_1 .

Resolviendo las ecuaciones (12-19) respecto a \dot{I}_1 , obtenemos:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\left(r_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} \cdot r_{22} \right) + j \left(x_1 - \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} \cdot x_{22} \right)} \quad (12-20)$$

De la estructura de esta expresión se deduce que desde el lado del arrollamiento primario todo el esquema puede ser considerado como un dipolo (fig. 12-24) con resistencias $r_1 + r_{tr}$ y reactancias $x_1 + x_{tr}$ donde

$$\begin{aligned} r_{tr} &= \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} r_{22} \\ x_{tr} &= \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} x_{22}, \end{aligned} \quad (12-21)$$

r_{tr} y x_{tr} se llaman resistencia y reactancia transferidas (del segundo circuito al primero). Cuando el circuito secundario está abierto,

$$r_{22} = \infty, \quad r_{tr} = x_{tr} = 0 \quad \text{e} \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{r_1 + jx_1}.$$

El cierre del circuito secundario es equivalente a la variación de la resistencia y de la reactancia del dipolo en r_{tr} y x_{tr} respectivamente. La resistencia transferida es siempre mayor que cero. La energía absorbida por ella es igual a la energía transferida del circuito primario al secundario. El signo de la reactancia transferida es contrario al de x_{22} .



FIG. 12-24

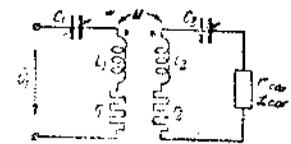


FIG. 12-25

Utilizando el esquema del dipolo equivalente es fácil hallar las condiciones de transferencia de la potencia máxima al circuito secundario, esto es a la resistencia r_{tr} . A tal efecto (ver subcap. 11-3) es necesario que se cumplan las siguientes relaciones

$$r_{tr} = r_1 \quad \text{y} \quad x_1 + x_{tr} = 0$$

6

$$r_1 = \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} r_{22} \quad \text{y} \quad x_1 = \frac{\omega^2 M^2}{r_{22}^2 + x_{22}^2} x_{22}. \quad (12-22)$$

Estas relaciones pueden obtenerse si se prevé la posibilidad de variar los parámetros de los circuitos. Para hacer variar x_1 y x_{22} , se conectan, en los circuitos primario y secundario, condensadores de capacidad variable (fig. 12-25). Para que varíe M los transformadores deben tener devanados móviles (variómetro).

Todas las expresiones dadas más arriba son válidas para el esquema de la figura 12-25, supuesto que:

$$x_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$$

y

$$x_{22} = \omega L_2 + x_{var} - \frac{1}{\omega C_2}$$

Se pueden elegir todos los valores que se quieren para M , x_1 y x_{22} que satisfagan a las dos condiciones (12-22) de la potencia máxima, transferida desde el circuito primario al secundario.

Esa potencia máxima es (ver 11-3)

$$P_{2\text{máx.}} = \frac{U_1^2}{4r_1}. \quad (12-23)$$

De la primera relación (12-22) tenemos

$$x_{22} = \sqrt{\frac{\omega^2 M^2 r_{22} - r_1 r_{22}^2}{r_1}}$$

x_{22} tiene un valor real siempre que $\omega M \geq \sqrt{r_1 r_{22}}$.

Si $M < \frac{\sqrt{r_1 r_{22}}}{\omega}$, no hay valor alguno de x_{22} y x_1 con los cuales se podría obtener la potencia máxima (12-23).

El esquema de dos mallas acopladas inductivamente puede ser reemplazado por uno equivalente sin dicho vínculo. Conectemos los dos bornes inferiores del esquema (fig. 12-22). El régimen del circuito no variará.

Consideraremos las partes de las mallas que contienen a los elementos r_1 , L_1 y r_2 , L_2 como dos ramas acopladas inductivamente, unidas a un mismo nudo por sus bornes homónimos y les aplicaremos el esquema equivalente (fig. 12-14). Obtendremos como resultado el es-

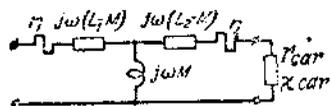


FIG. 12-26

quema equivalente de la figura 12-26. Observemos que, cuando una de las dos inductancias L_1 ó L_2 es menor que M , uno de los elementos del esquema equivalente con las impedancias $j\omega(L_1 - M)$ o $j\omega(L_2 - M)$ representa una capacidad.

12-10. Transformador ideal.

Enumeremos las condiciones que debe satisfacer el transformador como aparato destinado a la transformación de las tensiones: 1) la relación entre la tensión primaria y secundaria debe conservarse constante para cargas cualesquiera del transformador; 2) en el transformador no debe haber pérdidas de energía; 3) estando en marcha en vacío el transformador, cuando el circuito secundario está abierto, la corriente en el arrollamiento primario debe ser igual a cero. Esto prevendrá en ese régimen las pérdidas de energía en la línea de alimentación.

Llamaremos *transformador ideal* al que satisface las condiciones enumeradas. Aunque no resulta factible fabricar un transformador de ese tipo, no por ello deja de ser conveniente estudiar sus propiedades, por las siguientes consideraciones:

1. Se investigan así los caminos a seguirse para que en la construcción de los transformadores se puedan lograr propiedades próximas a las de un transformador ideal.

2. Los transformadores reales con núcleos de acero se asemejan por sus propiedades a los ideales y en los cálculos de circuitos pueden considerarse por aproximación como transformadores ideales.

3. Como se verá en los subcapítulos 12-13 y 12-15 los transformadores ideales son elementos constitutivos de los esquemas equivalentes de los transformadores y autotransformadores reales.

Veamos qué exigencias deben satisfacer los parámetros de un transformador ideal.

Partiendo de la condición de que no existen pérdidas de energía en el transformador, es necesario que las resistencias de sus devanados sean iguales a cero, $r_1 = r_2 = 0$. Para asegurar la constancia de la relación entre la tensión primaria y la secundaria basta agregar la condición de que el factor de acoplamiento entre los devanados sea igual a la unidad. Para $k = 1$ las espiras de los arrollamientos primario y secundario son atravesadas por un flujo magnético igual (ver subcap. 12-1), de allí que la relación entre las f.e.m. inducidas en los arrollamientos sea igual a la del número de espiras w_1 y w_2 . Para $r_1 = r_2 = 0$, independientemente de las corrientes que existen en los arrollamientos, las tensiones en sus bornes son iguales a las f.e.m. inducidas. Por consiguiente las tensiones son también proporcionales a los números de espiras:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{w_1}{w_2} = n. \quad (12-24)$$

La relación $\frac{w_1}{w_2}$ se llama relación de transformación.

Señalemos que $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{w_1}{w_2}$ solamente si se eligen los mismos sentidos positivos para \dot{U}_1 y \dot{U}_2 respecto a los bornes del mismo nombre de los arrollamientos, así como por ejemplo se indica en la figura 12-22. Si los sentidos positivos \dot{U}_1 y \dot{U}_2 respecto a los bornes del mismo nombre, no son iguales, entonces

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = -\frac{U_1}{U_2} = -\frac{w_1}{w_2} = -n.$$

Veamos ahora de qué manera se puede reducir a cero la corriente en vacío del transformador.

El flujo magnético que atraviesa los arrollamientos primario y secundario está en la siguiente relación con la tensión primaria:

$$u_1 = -e_1 = w_1 \frac{d\Phi}{dt}.$$

Para una tensión sinusoidal u_1 , la f.e.m. e_1 , y por consiguiente también el flujo magnético, son sinusoidales. Anotando la relación citada bajo la forma compleja, tendremos

$$\dot{U}_1 = j\omega w_1 \dot{\Phi}. \quad (12-25)$$

Para obtener un flujo sinusoidal es necesaria una f.e.m. sinusoidal

$$\dot{F} = R_M \dot{\Phi}, \quad (12-26)$$

donde R_M es la reluctancia del circuito magnético por el cual se cierra el flujo magnético.

En vacío $\dot{F} = w_1 \dot{I}_{1v}$ y por consiguiente,

$$\dot{I}_{1v} = \frac{R_M \dot{\Phi}}{w_1}. \quad (12-27)$$

La intensidad de la corriente en vacío se determina por la tensión aplicada. Se establece una corriente tal que el flujo magnético creado por ella induzca una f.e.m. que equilibre la tensión aplicada. La intensidad \dot{I}_{1v} puede disminuirse, como se ve de la expresión (12-27) reduciendo el valor de R_M o aumentando w_1 .

El aumento de w_1 no sólo implica un aumento del denominador (12-27) sino también una disminución del numerador. En efecto, para valores dados de U_1 y ω , y como se desprende de la expresión (12-25)

al aumentar w_1 disminuye $\Phi = \frac{U_1}{\omega w_1}$. Para un crecimiento ilimitado de w_1 , el flujo magnético, la f.m.m. y la corriente en vacío disminuyen ilimitadamente. Para conservar invariable la relación entre las ten-

siones primaria y secundaria (12-24) es necesario al aumentar w_1 , hacerlo también con w_2 .

Así finalmente los parámetros de un transformador ideal deben satisfacer a las tres condiciones siguientes:

$$1) r_1 = r_2 = 0, \quad 2) k = 1 \quad \text{y} \quad 3) R_M = 0,$$

o también

$$w_1 \rightarrow \infty \quad \text{y} \quad w_2 \rightarrow \infty \quad \text{para} \quad \frac{w_1}{w_2} = \text{const.}$$

Veamos qué otras propiedades posee el transformador ideal.

Con los sentidos positivos adoptados para las corrientes \dot{I}_1 e \dot{I}_2 en la figura 12-22, la f.m.m. para el transformador cargado es

$$\dot{F} = w_1 \dot{I}_1 - w_2 \dot{I}_2.$$

Como en el transformador ideal (para $R_M = 0$ o $w_1 \rightarrow \infty$ y $w_2 \rightarrow \infty$) $\dot{F} \rightarrow 0$, tenemos:

$$w_1 \dot{I}_1 = w_2 \dot{I}_2$$

o también:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{n} \quad (12-28)$$

la relación entre la corriente primaria y la secundaria es inversamente proporcional al número de espiras de los devanados primario y secundario.

De la (12-24) y (12-28) tenemos

$$\dot{U}_1 \dot{I}_1 = \dot{U}_2 \dot{I}_2.$$

las potencias complejas a la entrada y a la salida del transformador ideal son iguales entre sí.

Establezcamos la relación entre la impedancia de entrada del transformador ideal y la impedancia de carga

$$Z_{1en} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{\frac{w_1}{w_2} \dot{U}_2}{\frac{w_2}{w_1} \dot{I}_2} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 Z_c. \quad (12-29)$$

La impedancia de entrada de un transformador ideal es igual al producto de la impedancia de carga por el cuadrado de la razón entre los números de espiras del devanado primario y del secundario. Estando el circuito secundario abierto $Z_{1en} = \infty$ y estando el mismo en cortocircuito $Z_{1en} = 0$.

La conexión de un transformador, entre la fuente de energía y el receptor, modifica la impedancia de carga sobre la cual se conecta la fuente de energía. Esto se aprovecha en muchas ramas de la elec-

rotecnia (comunicaciones, radio, automática) para equilibrar las impedancias del receptor y de la fuente de energía y para elevar la potencia transmitida.

Basándose en las propiedades estudiadas del transformador ideal se puede adoptar la siguiente definición: un transformador ideal es aquél en el cual las relaciones entre las tensiones e intensidades prima-

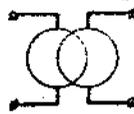


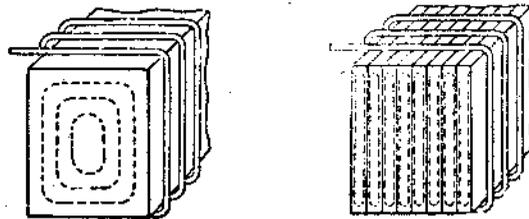
Fig. 12-27

rias y secundarias satisfacen a las relaciones (12-24) y (12-28). Es fácil verificar que esas dos relaciones involucran las restantes propiedades del transformador ideal. Representaremos en los esquemas el transformador ideal como se ve en la figura 12-27.

Para que un transformador real se asemeje por sus propiedades al transformador ideal, los devanados primario y secundario se disponen sobre un núcleo cerrado de acero. Con esto se logra una disminución muy grande (miles de veces) de la reluctancia del circuito magnético y se reduce considerablemente la corriente en vacío. Además, el núcleo de acero asegura un alto valor del coeficiente de acoplamiento k entre los devanados. En presencia de un núcleo de acero surgen una serie de fenómenos que se analizan en el párrafo siguiente.

12-11. Fenómenos condicionados por la presencia de núcleos ferromagnéticos en las bobinas y en los transformadores.

En el núcleo de acero, el campo magnético variable induce corrientes parásitas, cuya distribución está indicada esquemáticamente en la figura 12-28 con líneas de puntos. El paso de las corrientes parásitas es acompañado por pérdidas de energía y por la acción desmagnetizadora de esas corrientes (ver parág. 8-12). Dicha acción no es uniforme en las distintas partes de la sección del núcleo. Se manifiesta más sensiblemente en la parte central de la sección del núcleo porque



es abrazada por el máximo número de lazos de las corrientes parásitas, en virtud de lo cual el flujo magnético se distribuye desigualmente en la sección del núcleo. La inducción magnética tiene un valor máximo en la periferia y mínimo en la parte central de la sección. Dicha parte central está como protegida, por así decirlo, con las corrientes parásitas. Este fenómeno de la distribución desigual del flujo magnético variable en la sección del circuito magnético es similar al fenómeno del efecto de superficie en un conductor de corriente alterna; de allí que se le suele llamar efecto magnético de superficie. Su manifestación es tanto más marcada cuanto mayores son la frecuencia, las dimensiones de la sección transversal del núcleo, la permeancia magnética y la conductividad del material del núcleo. Para disminuir las pérdidas de energía debidas a las corrientes parásitas y para disminuir su acción de pantalla, los núcleos se arman con chapas de acero separadas, aisladas eléctricamente una de la otra (fig. 12-29). En tales condiciones las corrientes parásitas disminuirán, puesto que se van a cerrar siguiendo trayectorias alargadas y estrechas que ofrezcan una gran resistencia. Además disminuye la acción de pantalla dado que todo el núcleo se divide en hojas separadas que se encuentran en igualdad de condiciones. La no uniformidad de distribución del flujo magnético dentro de los límites de cada chapa es imperceptible cuando su espesor es suficientemente pequeño. Se emplean también núcleos formados por delgados alambres de acero aislados eléctricamente.

Para reducir las corrientes parásitas, tanto las chapas como los alambres con los que se arma el circuito magnético se fabrican con aceros electrotécnicos especiales que contienen distintos agregados que reducen su conductividad. A fin de que las pérdidas de energía debidas a las corrientes parásitas no sean excesivamente grandes, se utilizan chapas cuyo espesor es tanto menor cuanto más alta es la frecuencia. Para una frecuencia de 50 c/s se emplean chapas de 0,25 — 0,5 mm de espesor; para frecuencias acústicas del orden de los cientos y miles de c/s, de 0,02 — 0,05 mm. Para frecuencias más altas el flujo magnético en las bobinas que contienen esta clase de núcleos y a consecuencia de una acentuada acción de pantalla de las corrientes parásitas, se vuelve menor que cuando falta el núcleo. Para frecuencias hasta de 30 — 50 Mc/s se utilizan núcleos fabricados con magnetodieléctricos. Estos constan de un polvo ferromagnético, las dimensiones de cuyas partículas son del orden de varios micrones y de un dieléctrico que liga esas partículas. El cálculo de distribución del flujo magnético que liga esas partículas. El cálculo de distribución del flujo magnético en la sección transversal de los núcleos de acero y el cálculo de las pérdidas debidas a las corrientes parásitas se estudian en la teoría del campo electromagnético. En el caso en que se puede despreciar la desigualdad de la distribución del flujo magnético en la sección transversal de las chapas que forman el núcleo, se obtiene la siguiente relación que expresa la potencia de las pérdidas de energía debidas a las corrientes parásitas

$$P_p = \sigma_p f^2 B_m^2 G,$$

donde σ_p — es el coeficiente que depende de la clase de acero y de las dimensiones de las chapas.

B_m — es la amplitud de la inducción magnética.

G — es el peso de la parte del núcleo que se estudia.

La periódica remagnetización del acero trae aparejadas pérdidas de energía debidas a la histéresis. La potencia de dichas pérdidas de energía es proporcional a la frecuencia f y se determina de acuerdo a distintas fórmulas empíricas. Más abajo se da una de ellas

$$P_h = \sigma_h f B_m^n G,$$

donde σ_h — es el coeficiente que depende de la clase de acero.

Para valores de B_m comprendidos entre 1 000 y 10 000 gauss, $n = 1,6$.

Para valores de B_m comprendidos entre 10 000 y 16 000 gauss, $n = 2$.

La circunstancia de que las pérdidas de energía debidas a las corrientes parásitas y a la histéresis varían de diferente manera en función de la frecuencia, permite separarlas una de la otra siempre que se conozca la suma de las pérdidas en el núcleo para dos (o más) valores de la frecuencia pero para uno sólo y el mismo valor de B_m .

Para poner en claro en qué se manifiesta la variación de la permeancia magnética del material del núcleo, supongamos, para simplificar que el devanado de la bobina no tiene resistencia. Entonces la tensión de los bornes de la bobina se equilibrará solamente con la f.e.m. de autoinducción. De allí que, si la tensión es sinusoidal, también la f.e.m. que la equilibra deberá ser sinusoidal y por consiguiente lo será también el flujo magnético que induce la f.e.m. La forma de la curva de la corriente que origina el flujo magnético está determinada por la relación entre la corriente y el flujo magnético. Si existen grandes entrehierros en el circuito magnético, son éstos los que determinan fundamentalmente su reluctancia. En esas condiciones, dentro de un gran margen de variación del campo magnético, existe una dependencia casi proporcional entre el flujo magnético y la corriente y, para una variación sinusoidal del flujo magnético, la corriente también varía sinusoidalmente. Si los entrehierros en el circuito magnético son pequeños y, si al variar el campo magnético la inducción magnética alcanza valores situados más allá del codo de la curva de magnetización, entonces la relación entre el flujo magnético y la corriente resulta no lineal y, al variar sinusoidalmente el flujo magnético, la corriente variará no sinusoidalmente. El problema referente a la curva de la corriente se examina detalladamente en el parágrafo 4-9, volumen II. En muchos casos, a pesar de que las curvas de la corriente (o de la tensión) se apartan de la forma de una senoide, para los cálculos aproximados se introducen las *corrientes* (o tensiones) *sinusoidales equivalentes* que tienen iguales valores eficaces que las correspondientes corrientes (tensiones) no sinusoidales. En lo sucesivo las corrientes no sinusoidales serán reemplazadas por otras sinusoidales equivalentes (en esta sección del libro).

12-12. Diagrama vectorial y esquema equivalente de una bobina con núcleo de acero.

Consideremos una bobina con corriente alterna de baja frecuencia, cuando se puede no tomar en cuenta la capacidad entre sus espiras.

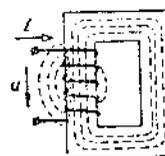


FIG. 12-30

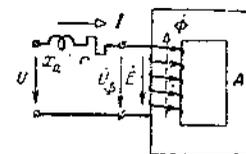


FIG. 12-31

En la figura 12-30 se muestra esquemáticamente el cuadro de un campo magnético de una bobina con núcleo de acero. La parte de las líneas magnéticas que se cierran, sin que medie el núcleo, corresponden al campo magnético en el aire. Para que sea cómodo el análisis, formemos un esquema equivalente al de la bobina considerada. En ese

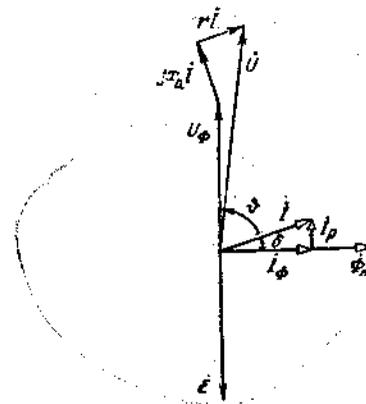


FIG. 12-32

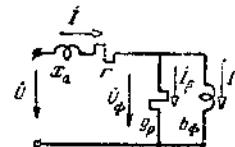


FIG. 12-33

esquema (fig. 12-31) la reactancia inductiva del devanado X_a condicionada por el campo magnético en el aire y la resistencia activa r del devanado están representados en forma de elementos separados, conectados en serie con la bobina ideal A , cuyo devanado no tiene resistencia y cuyo campo magnético está enteramente concentrado en el núcleo.

Cada espira de la bobina A se concatena con un flujo magnético igual Φ . La fuerza electromotriz, inducida en la bobina, es $e = -w \frac{d\Phi}{dt}$. Supongamos que el flujo magnético varíe sinusoidal-

mente con la amplitud Φ_m , entonces pasando a las amplitudes complejas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= -j\omega\Phi_m \\ \dot{E} &= \frac{E_m}{\sqrt{2}} = -j \frac{2\pi f}{\sqrt{2}} \omega\Phi_m = -j4,44f\omega\Phi_m \end{aligned}$$

Llevemos sobre el diagrama vectorial, (fig. 12-32), los vectores Φ_m , \dot{E} y $\dot{U}_\phi = -\dot{E}$.

A consecuencia de las pérdidas de energía de las corrientes parásitas y de la histéresis, la corriente \dot{I} , en la bobina A se retrasa de un ángulo ϑ menor que $\frac{\pi}{2}$ respecto a la tensión \dot{U}_ϕ . Se la puede descomponer en dos componentes; la componente de imanación \dot{I}_ϕ , que está en fase con el flujo magnético Φ_m y la componente \dot{I}_p , condicionada por las pérdidas de energía en el acero y que está en fase con la tensión \dot{U}_ϕ . Las componentes \dot{I}_ϕ e \dot{I}_p se determinan del cálculo del circuito magnético (ver parág. 4-11, vol. II). La diferencia de fases δ entre \dot{I} y Φ_m , se llama ángulo del retraso magnético o ángulo de pérdidas.

Sumando el vector \dot{U}_ϕ con los vectores de las tensiones $jx_a\dot{I}$ y $r\dot{I}$ obtenemos el vector de tensión \dot{U} en los bornes del circuito:

$$\dot{U} = \dot{U}_\phi + jx_a\dot{I} + r\dot{I}$$

La división de la corriente \dot{I} en dos componentes \dot{I}_ϕ e \dot{I}_p permite formar el esquema equivalente que se muestra en la figura 12-33. Los parámetros de los elementos de ese esquema g_p y b_ϕ dependen de la tensión U_ϕ (ver más detalles en el subcapítulo 4-11, vol. II).

12-13. Esquemas equivalentes de un transformador con núcleo de acero.*

Consideremos para empezar que la permeancia del acero es constante y que por consiguiente, el flujo magnético en el núcleo y la fuerza magnetomotriz están entre sí en una relación lineal. En tales condiciones las pérdidas en el núcleo de acero estarán condicionadas exclusivamente por las corrientes parásitas. No consideraremos la capacidad de los arrollamientos.

En la figura 12-34 se presenta un circuito que contiene un transformador de dos arrollamientos con núcleos de acero y se muestra esquemáticamente el cuadro del campo magnético.

* El transformador con núcleo de acero fué ideado por P. N. Iáblochov en 1876.

Destaquemos el flujo magnético Φ que se puede representar por líneas magnéticas contenidas enteramente en el núcleo de acero. Ese flujo atraviesa ambos arrollamientos del transformador. La parte res-

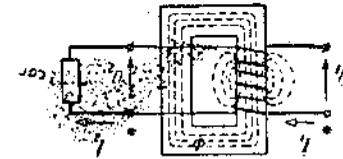


FIG. 12-34

tante del campo magnético que puede representarse por líneas magnéticas que pasan total o parcialmente en el aire, la llamaremos campo magnético en el aire. Los flujos concatenados con los arrollamientos y condicionados por el campo en el aire son

$$\begin{aligned} \Psi_{1a} &= L_{1a}i_1 - M_a i_2 \\ \Psi_{2a} &= L_{2a}i_2 - M_a i_1 \end{aligned}$$

donde L_{1a} , L_{2a} , M_a son las inductancias propias y mutuas de los arrollamientos, que sólo toman en cuenta el campo magnético en el aire.

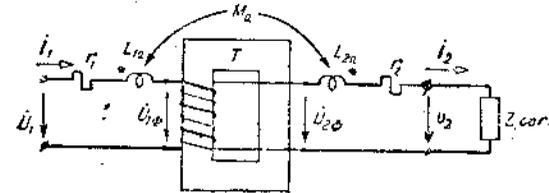


FIG. 12-35

Para el circuito examinado se puede formar un esquema (fig. 12-35) en el cual los elementos r_1 y r_2 incluyan las resistencias de los arrollamientos, los elementos L_{1a} , L_{2a} afectados por la inducción mutua M_a , toman en cuenta el campo en el aire, y T representa el transformador, en cierto modo idealizado. Sus arrollamientos no tienen resistencias, no existe en él el campo magnético en el aire y por consiguiente el coeficiente de acoplamiento de las dos bobinas es $k=1$. Por lo tanto la relación entre la tensión primaria y secundaria $\dot{U}_{1\phi}$ y $\dot{U}_{2\phi}$ del transformador T

$$\frac{\dot{U}_{1\phi}}{\dot{U}_{2\phi}} = \frac{w_1}{w_2}$$

es la misma que en el caso de un transformador ideal.

Sin embargo el transformador T no es ideal en el sentido en que se comprendía en el parágrafo 12-10, dado que la reluctancia de su

circuito magnético $R_m \neq 0$ y los números de espiras w_1 y w_2 no son infinitamente grandes.

El flujo magnético en el transformador es creado por la fuerza magnetomotriz

$$\dot{F} = w_1 \dot{I}_1 - w_2 \dot{I}_2 \quad (12-30)$$

Representemos la intensidad \dot{I}_1 en forma de una suma de dos componentes

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{F}}{w_1} + \frac{w_2}{w_1} \dot{I}_2 = \dot{I}_{1F} + \dot{I}'_2 \quad (12-31)$$

$\dot{I}_{1F} = \frac{\dot{F}}{w_1}$ sólo depende de la f.m.m. \dot{F} , necesaria para crear el flujo magnético Φ y representa la componente magnetizante de la corriente del devanado primario.

La segunda componente de carga $\dot{I}'_2 = \frac{w_2}{w_1} \dot{I}_2$ depende de la corriente \dot{I}_2 . La llaman corriente secundaria del transformador, reducida al primario. La reducción se entiende en el sentido de que el valor de la corriente \dot{I}'_2 es equivalente a la corriente \dot{I}_2 en lo que a formación de la f.m.m. se refiere. La corriente reducida \dot{I}'_2 al recorrer el devanado primario, crea una f.m.m. igual a la que crea la corriente \dot{I}_2 al pasar por el secundario: $w_1 \dot{I}'_2 = w_2 \dot{I}_2$. Observemos que la componente de la corriente primaria $\dot{I}'_2 = \frac{w_2}{w_1} \dot{I}_2$ está en la misma relación con la corriente secundaria, en que están las corrientes primaria y secundaria en el transformador ideal.

La descomposición de la corriente \dot{I}_1 en sus componentes \dot{I}_{1F} e \dot{I}'_2 permite pasar del esquema de la figura 12-35 al de la figura 12-36 que contiene a un transformador ideal.

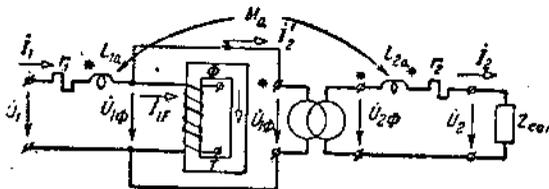


Fig. 12-36

El transformador T en el esquema de la figura 12-36, cuyo secundario está en circuito abierto, constituye una bobina de reacción, con núcleo de acero y cuyo arrollamiento no tiene resistencia.

A consecuencia de las pérdidas de energía en el núcleo, la corriente \dot{I}_{1F} retrasa respecto a la tensión \dot{U}_1 de un ángulo menor de $\frac{\pi}{2}$. Consi-

derando el transformador T en el esquema de la figura 12-36 como un dipolo, se lo puede representar por un esquema equivalente formado por una conexión en paralelo de una conductancia $g_{1\Phi}$ y de una susceptancia $b_{1\Phi}$ (fig. 12-37).

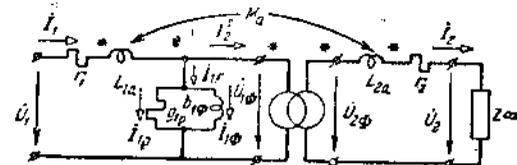


Fig. 12-37

De acuerdo a este esquema la corriente \dot{I}_{1F} se divide en dos componentes $\dot{I}_{1\Phi}$ e \dot{I}_{1P} . La componente $\dot{I}_{1\Phi}$ retrasa en fase de $\frac{\pi}{2}$ respecto a la tensión $\dot{U}_{1\Phi}$ y está en fase con el flujo magnético Φ . La componente \dot{I}_{1P} , condicionada por las pérdidas en el núcleo está en fase con la tensión $\dot{U}_{1\Phi}$.

Para el esquema (fig. 12-37) tenemos:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_{1a})\dot{I}_1 - j\omega M_a \dot{I}_2 + \dot{U}_{1\Phi};$$

$$\dot{U}_{1\Phi} = \frac{w_1}{w_2} \dot{U}_{2\Phi} = \frac{w_1}{w_2} [(r_2 + j\omega L_{2a})\dot{I}_2 - j\omega M_a \dot{I}_1 + \dot{U}_2].$$

Sustituyendo $\dot{I}_2 = \frac{w_1}{w_2} \dot{I}'_2$, obtenemos:

$$\dot{U}_1 = (r_1 + j\omega L_{1a})\dot{I}_1 - j\omega M'_a \dot{I}'_2 + \dot{U}_{1\Phi}; \quad (12-32)$$

$$\dot{U}_{1\Phi} = (r'_2 + j\omega L'_{2a})\dot{I}'_2 - j\omega M'_a \dot{I}_1 + \dot{U}'_2, \quad (12-33)$$

donde

$$r'_2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 r_2, \quad L'_{2a} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_{2a},$$

$$M'_a = \frac{w_1}{w_2} M_a; \quad \dot{U}'_2 = \frac{w_1}{w_2} \dot{U}_2$$

son las magnitudes r_2 , L_{2a} , M_a y \dot{U}_2 reducidas al primario.

A las ecuaciones obtenidas (12-32) y (12-33) les corresponde el esquema de la figura 12-38 que se distingue del anterior en que el transformador ideal está desplazado hacia la derecha.

En el subcapítulo 8-12 se vió que para dimensiones dadas de una bobina, su resistencia y su inductancia propia son proporcionales al cuadrado del número de espiras. En el 12-1 vimos que para dimensiones y para una posición dadas de dos bobinas, su inductancia mutua

era proporcional al producto de los números de espiras. Recordando esto resulta evidente que las magnitudes

$$r'_2 = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 r_2; \quad L'_{2a} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_{2a},$$

constituyen la resistencia r_2 y la inductancia propia L_{2a} de un devanado secundario cuyo número de espiras es $w_2 = w_1$ y cuyas dimensiones siguen siendo las mismas. Del mismo modo la magnitud

$$M'_a = \frac{w_1}{w_2} M_a$$

representa la inductancia mutua entre los devanados, siempre que el secundario sea objeto de la modificación indicada. Por cierto, ello no significa que r'_2, L'_{2a} sean respectivamente iguales a r_1, L_1 , puesto que, si bien esos parámetros se refieren a arrollamientos que tienen igual número de espiras, sus dimensiones son en general diferentes.

Recordemos que para L_{2a} y M_a sólo se toma en cuenta el campo magnético en el aire.

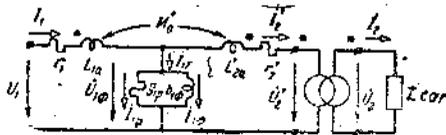


FIG. 12-38

Efectuemos una sustitución equivalente del acoplamiento inductivo entre los elementos L_{1a} y L_{2a} (ver 12-6); entonces obtendremos un esquema equivalente del circuito considerado en su forma definitiva (fig. 12-39). En dicho esquema (ver 12-1)

$$L_{1a} - M'_a = L_{1a} - \frac{w_1}{w_2} M_a = L_{1s};$$

$$\begin{aligned} L'_{2a} - M'_a &= \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_{2a} - \frac{w_1}{w_2} M_a = \\ &= \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \left(L_{2a} - \frac{w_2}{w_1} M_a\right) = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 L_{2s} = L'_{2s}; \end{aligned}$$

donde L'_{2s} es la inductancia propia de dispersión del arrollamiento secundario reducida al primario.

En las condiciones reales la permeancia del acero no es constante, de allí que la corriente i_{1F} no sea sinusoidal para una tensión sinusoidal $u_{1\phi}$ (ver 12-11). En los transformadores, usados en la electroenergética, la corriente i_{1F} sólo constituye un 2 a un 10% de la corriente I_1 en plena carga. El carácter no sinusoidal introducido por la corriente i_{1F} en las corrientes restantes y en las caídas de tensión no es muy grande. Por lo tanto el esquema equivalente obtenido se aplica

también a los transformadores reales, aunque i_{1F} debe comprenderse como una corriente sinusoidal equivalente en su valor eficaz a la corriente no sinusoidal i_{1F} . Las experiencias demuestran que en funcionamiento en vacío, cuando el circuito secundario ($I_2 = 0$) está abierto;

la relación $\frac{U_1}{U_2}$ es prácticamente igual a la relación $\frac{w_1}{w_2}$, es decir que la caída de tensión en la impedancia $Z_1 = r_1 + j\omega L_{1s}$ (fig. 12-39), condicionada por la corriente i_{1F} no se manifiesta en la práctica y puede no tomarse en cuenta. Esto permite pasar a un esquema equivalente simplificado (fig. 12-40) en el cual la rama con la corriente magnetizante está transferida a la entrada. Tenemos en el esquema

$$Z'_c = r_1 + r'_2 + j\omega(L_{1s} + L'_{2s}); \quad (12-34)$$

$$Z_{1F} = \frac{1}{g_{1F} - jb_{1\phi}}$$

En la rama con la corriente magnetizante se desprecia la reactancia $\omega M'_c$ por ser una magnitud pequeña con respecto a Z_{1F} .

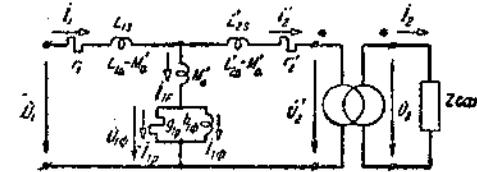


FIG. 12-39

Estando en cortocircuito los bornes secundarios, la impedancia de entrada del transformador se determina como una impedancia de dos ramas en paralelo Z'_c y Z_{1F} . Dado que Z_{1F} es mucho mayor que Z'_c , prácticamente la impedancia de entrada es igual a Z'_c . De aquí que a Z'_c se le haya llamado *impedancia de cortocircuito del transformador*, reducida al primario.

Además del esquema de la figura 12-40 se suele utilizar también otro esquema equivalente simplificado (fig. 12-41). Este resulta del primero, trasladando el transformador ideal a la entrada. Al mismo tiempo para conservar la equivalencia se transforman las impedancias:

$$Z''_c = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 Z'_c; \quad Z_{2F} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 Z_{1F}. \quad (12-35)$$

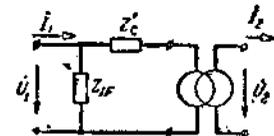


FIG. 12-40

Los valores obtenidos son las impedancias reducidas al arrollamiento secundario del transformador.

Es frecuente que en los cálculos de los circuitos se desprecien las corrientes magnetizantes de los transformadores; entonces en los esquemas equivalentes del transformador (fig. 12-40 y 12-41) desaparecen las ramas con las impedancias Z_{1F} y Z_{2F} y quedan conexiones simples de un transformador ideal con la impedancia Z'_c o la Z''_c .

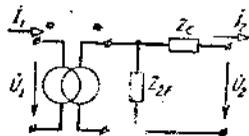


FIG. 12-41

En los cálculos previos de orientación se desprecian a veces también las impedancias Z'_c o Z''_c , es decir, a los transformadores reales se los considera como ideales.

12-14. Cálculo de circuitos eléctricos con transformadores.

Daremos dos ejemplos que ilustren la aplicación de los esquemas equivalentes de los transformadores en los cálculos de los circuitos eléctricos. En ambos ejemplos no vamos a tomar en cuenta las corrientes magnetizantes. Esto nos permitirá utilizar los esquemas equivalentes más simples que se han mencionado al final del párrafo precedente.

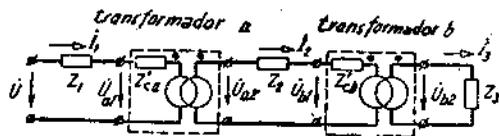


FIG. 12-42

1. *Circuito con transformadores conectados en serie.* Examinemos un circuito formado por la línea 1, el transformador *a*, la línea 2, el transformador *b* y la carga, conectados en serie. En el esquema del circuito (fig. 12-42), las líneas y la carga están dadas por sus impedancias Z_1 , Z_2 y Z_3 ; los transformadores, por sus esquemas equivalentes simples que contienen las impedancias $Z'_{c,a}$ y $Z'_{c,b}$ y los transformadores ideales cuyas relaciones de transformación son $n_a = \frac{w_{a1}}{w_{a2}}$ y $n_b = \frac{w_{b1}}{w_{b2}}$.

Sean dadas las impedancias de todos los elementos del esquema, las relaciones de transformación y la tensión al principio de la primera línea; se pide determinar las intensidades y las tensiones en los distintos tramos del circuito.

El esquema contiene tres circuitos acoplados inductivamente. Para efectuar el cálculo es necesario transformar el esquema, eliminando los vínculos inductivos. Una transformación tal se efectúa reduciendo las impedancias a cualquiera de las tres mallas. Reduzcámosla a la primera que contiene el arrollamiento primario del transformador *a*. Reduzcamos primero la impedancia de la tercera malla a la segunda (esquema de la fig. 12-43). En el esquema

$$\dot{U}_{b2}^{(2)} = n_b \dot{U}_{b2}; \quad \dot{I}_3^{(2)} = \frac{\dot{I}_3}{n_b}$$

son la tensión y la corriente secundarias del transformador *b* reducidas al primario.

Reduzcamos luego la segunda malla a la primera. Como resultado obtendremos un esquema sin acoplamientos inductivos (fig. 12-44)

$$\dot{U}_{a2}^{(1)} = n_a \dot{U}_{a2}; \quad \dot{U}_{b1}^{(1)} = n_a \dot{U}_{b1}; \quad \dot{U}_{b2}^{(1)} = n_a \dot{U}_{b2}^{(2)} = n_b n_a \dot{U}_{b2},$$

$$\dot{I}_2^{(1)} = \frac{\dot{I}_2}{n_a}; \quad \dot{I}_3^{(1)} = \frac{\dot{I}_3^{(2)}}{n_a} = \frac{\dot{I}_3}{n_a n_b}$$

Determinar la corriente y las tensiones en este circuito, dada la tensión \dot{U} , no presenta dificultades.

2. *Conexión de transformadores en paralelo.* Examinemos un circuito formado por una línea 1, dos transformadores conectados en

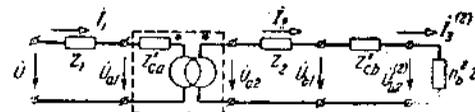


FIG. 12-43

paralelo *a* y *b* y la carga. Podemos ver el esquema de cálculo en la figura 12-45. En la práctica se conectan, por lo general, en paralelo, transformadores que tienen igual relación de transformación, pero para una mayor generalización consideremos que dichas relaciones sean distintas. Sean dadas, como en el ejemplo anterior, las impedancias de

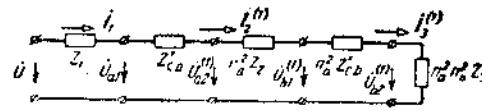


FIG. 12-44

los elementos del circuito, las relaciones de transformación y la tensión al principio de la línea; se desean conocer las intensidades y las tensiones en los distintos tramos del circuito.

En la notación de las corrientes y de las tensiones en los distintos

tramos del esquema (fig. 12-45) se tomaron en cuenta los vínculos entre las corrientes y tensiones en los lados primario y secundario de los transformadores ideales, y la primera ley de Kirchhoff. Esto

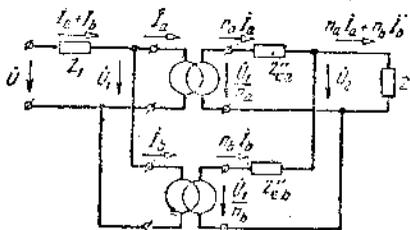


FIG. 12-45

reduce el número de incógnitas (corrientes y tensiones) a cuatro. Para su determinación hay que resolver simultáneamente cuatro ecuaciones:

$$\dot{U} - Z_1(\dot{I}_a + \dot{I}_b) = \dot{U}_1;$$

$$\frac{\dot{U}_1}{n_a} - Z''_{c,a} n_a \dot{I}_a = \dot{U}_2;$$

$$\frac{\dot{U}_1}{n_b} - Z''_{c,b} n_b \dot{I}_b = \dot{U}_2.$$

12-15. Autotransformador.

Cuando hay que realizar modificaciones insignificantes de tensión, resulta más económico utilizar autotransformadores en lugar de recurrir a transformadores con relaciones de transformación próximas a la unidad.

El autotransformador tiene un sólo arrollamiento, subdividido en partes (dos en el caso más simple) acoplados inductivamente entre sí.

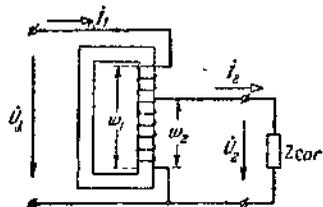


FIG. 12-46

En la figura 12-46 se muestra un transformador reductor de tensiones. La fuente de alimentación se conecta a todo el arrollamiento que tiene w_1 espiras; la carga se conecta a una parte del arrollamiento con w_2 espiras. El autotransformador puede considerarse como un

transformador cuyos devanados primario y secundario fueron reemplazados por uno solo. En presencia de un núcleo cerrado de acero, del mismo modo que para el transformador, son válidas las relaciones aproximadas entre las tensiones e intensidades primarias y secundarias:

$$\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{w_1}{w_2}; \quad \frac{I_1}{I_2} \approx \frac{w_2}{w_1}; \quad U_1 I_1 \approx U_2 I_2.$$

La ventaja económica del autotransformador resalta si se toma en cuenta que en una parte considerable de su arrollamiento (w_2) fluye una corriente diferencial $|\dot{I}_1 - \dot{I}_2|$ que, para una relación de transformación próxima a la unidad, es pequeña.

Para los autotransformadores son válidos los mismos esquemas simplificados que para los transformadores (fig. 12-40 y 12-41). Observemos que las expresiones que vinculan Z'_c y Z''_c con los parámetros del arrollamiento del autotransformador son distintas de las expresiones análogas para Z'_c y Z''_c del transformador.



CAPÍTULO XIII

DIAGRAMAS CIRCULARES

13-1. Diagramas circulares simples.

Numerosos problemas prácticos exigen que se estudie la variación del régimen de un circuito en función de diversos factores. Con ese objeto además de los métodos analíticos, se utiliza un método gráfico, la construcción del lugar geométrico de los extremos de los vectores que representan a las distintas magnitudes. Esos lugares geométricos, llamados diagramas, llegan a tener formas bastante complejas. En los casos más simples se reducen a líneas rectas y a arcos de círculos denominándose *diagramas lineales y circulares*, respectivamente.

Anteriormente se han obtenido diagramas lineales al estudiarse las relaciones entre las tensiones, al principio y al final de una línea.

Analicemos algunos regímenes de circuitos por el método gráfico. Veamos cómo variará el régimen de un circuito serie que contiene una resistencia activa r y una reactancia x variable entre los límites $-\infty$ y $+\infty$, con la condición de que la tensión U en los bornes del circuito se mantenga invariable.

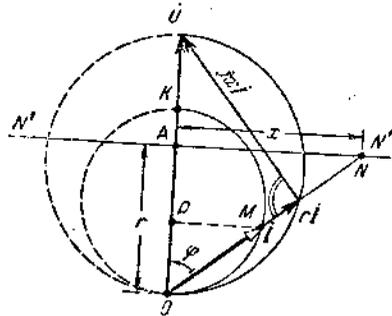


FIG. 13-1

Los vectores \vec{U} , $r\vec{I}$, $\phi\vec{I}$ forman un triángulo rectángulo (fig. 13-1). Al variar la reactancia x varían los catetos, manteniéndose la hipotenusa \vec{U} invariable. El lugar geométrico de los vértices del ángulo recto es la circunferencia. La semicircunferencia trazada con línea llena

corresponde a los valores positivos de x ; la otra semicircunferencia indicada con líneas de puntos corresponde a sus valores negativos. El vector de intensidad \vec{I} coincide en dirección con el vector $r\vec{I}$ y es proporcional a su longitud ($r = \text{const}$) por lo tanto, el lugar geométrico de los extremos del vector de la corriente es también una circunferencia. Su diámetro representa al vector de corriente $\vec{I}_0 = \frac{\vec{U}}{r}$, estando la reactancia variable en cortocircuito ($x = 0$).

Para determinar, con el diagrama circular, la intensidad para un valor dado de x hay que encontrar la dirección del vector de la corriente. Para eso se puede efectuar el siguiente trazado: llevar en la dirección del vector \vec{U} el segmento OA que representa en escala arbitraria la resistencia r y luego, sobre la recta $N'N''$, perpendicular a OA , llevar desde el punto A el segmento AN que representa en la misma escala a la reactancia x . Los valores positivos de x se llevan en el sentido AN'' y los negativos, en el AN' . La recta ON formará con el vector \vec{U} el ángulo ϕ , dado que $\text{tg } \angle AON = \frac{x}{r} = \text{tg } \phi$, es decir, esa recta determi-

naré precisamente la dirección del vector \vec{I} . El punto de intersección de la recta ON con el diagrama circular de la corriente determinará la posición del extremo del vector \vec{I} . El segmento ON representa la impedancia del circuito. La corriente y sus componentes activa y reactiva, para una tensión U invariable, varían proporcionalmente a las conductancias g , g y b . Las potencias aparentes, activa y reactiva del circuito, para una tensión invariable U , son proporcionales a la corriente y a sus componentes activa y reactiva respectivamente y, por consiguiente, pueden determinarse también de acuerdo a los segmentos OM , OP y MP . La potencia activa es máxima para $x = 0$, la potencia reactiva lo es para $|x| = r$ (el segmento MP tiene en ese caso la longitud máxima).

Observemos que el diagrama en la figura 13-1 permite analizar la influencia sobre el régimen del circuito, de la variación de la inductancia o de la capacidad para una resistencia y una frecuencia constantes y asimismo la influencia de la variación de la frecuencia para una resistencia, una inductancia y una capacidad constantes.

Veamos ahora cómo variará el régimen de un circuito serie dado para una reactancia x constante y para una resistencia activa variable de 0 a ∞ siempre que la tensión U en los bornes del circuito se mantenga constante. Como en el ejemplo precedente, el lugar geométrico de los vértices del ángulo recto del triángulo de tensiones, es una semicircunferencia (fig. 13-2) trazada con línea llena para el caso en que la reactancia constante $x > 0$, y con líneas de puntos para $x < 0$. El vector de la corriente \vec{I} coincide en dirección con el vector $r\vec{I}$ pero su longitud es proporcional a la del vector $\phi\vec{I}$, puesto que $x = \text{const}$. Esta condición es satisfecha por el segmento de recta que coincide con el vector $r\vec{I}$ en dirección, trazado desde el punto O hasta la semicircunferencia OMK cuyo diámetro OK es perpendicular al vector \vec{U} . La pro-

porcionalidad entre las longitudes del segmento OM y del vector jxI deriva de la semejanza de los triángulos KMO y Ona . Aquí y más adelante se citará la figura 13-2 para el caso en que $x > 0$. La construc-

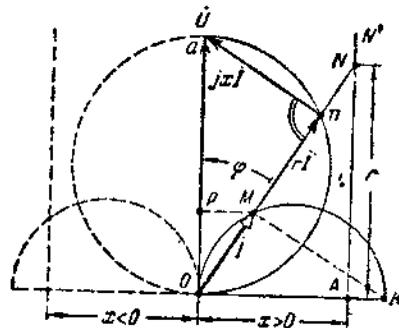


FIG. 13-2

ción, para $x < 0$, está efectuada con líneas de puntos. La semicircunferencia OMK es precisamente el lugar geométrico de los extremos del vector de la corriente. Su diámetro OK representa al vector de la corriente $I_0 = \frac{U}{jx}$, para $r = 0$.

Llevemos el segmento OA que representa, en cierta escala, la reactancia invariable x . En la recta AN' , perpendicular a OA llevaremos en la misma escala la resistencia variable r . En la figura 13-2 se ha marcado el segmento AN que corresponde a cierto valor particular de r . El segmento ON representa la impedancia (resistencia total) del circuito. La dirección del segmento ON determina la del vector I para el valor dado r . Esto proviene de que $\angle aON = \angle ONA = \varphi$. Como ya se indicó en el ejemplo analizado más arriba, los segmentos OM , OP y MP pueden servir como medida de las conductancias y , g y b y de las potencias S , P , y Q .

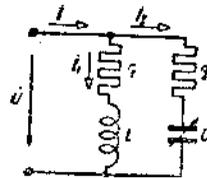


FIG. 13-3

Como último ejemplo construyamos el diagrama de la corriente en la parte no ramificada del circuito de la figura 13-3, para el caso en que varía la capacidad C y, con la condición de que r_1 , r_2 y L , como también la frecuencia y el valor eficaz de la tensión aplicada sean constantes.

Tracemos los vectores constantes \dot{U} e $\dot{i} = \frac{\dot{U}}{r_1 + j\omega L}$ (fig. 13-4).

En el extremo del vector \dot{I}_1 construyamos un diagrama circular para la corriente \dot{I}_2 , como en la figura 13-1.

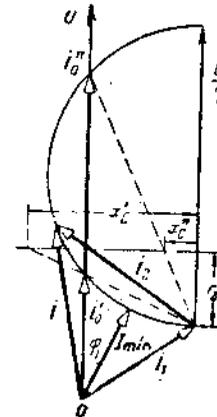


FIG. 13-4

En el diagrama circular se muestra la posición del vector \dot{I}_2 para el valor particular $x_c = \frac{1}{\omega C}$. El vector de la corriente $\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$. Como se ve de la construcción, el extremo del vector \dot{I} se desplaza por la misma semicircunferencia por la que se desplaza el extremo del vector \dot{I}_2 . En el diagrama están marcados dos regímenes de resonancia.

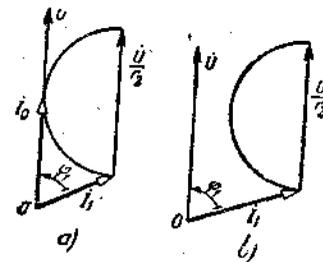


FIG. 13-5

El primero tiene lugar para $x_c = x'_c$ y el segundo para $x_c = x''_c$. Del diagrama circular se deduce que la intensidad pasa por un mínimo en las proximidades del primer régimen de resonancia pero no en la resonancia.

Si $I_1 \sin \varphi_1 = \frac{U}{2r_2}$, entonces el diagrama circular se dispondrá como

lo indica la figura 13-5, *a* y evidentemente será posible un solo régimen de resonancia. Para $I_1 \sin \varphi_1 > \frac{U}{2r_2}$ (fig. 13-5, *b*) no se produce resonancia para ningún valor de la capacidad variable *C*.

13-2. Ecuación compleja de la circunferencia.

En el estudio de los circuitos eléctricos algunas magnitudes se determinan con bastante frecuencia por una ecuación de la siguiente formá:

$$M = \frac{B}{A + N}; \quad (13-1)$$

donde

$$A = ae^{j\alpha} = \text{const}, \quad B = be^{j\beta} = \text{const},$$

y

$$N = ne^{j\nu}$$

es una magnitud compleja variable con argumento constante y módulo *n* que varía desde 0 hasta ∞ . Demostremos que el lugar geométrico de los extremos del vector *M* es un arco de circunferencia. Dividamos el numerador y el denominador de la expresión (13-1) por *A*:

$$M = \frac{\frac{B}{A}}{1 + \frac{N}{A}} = \frac{M_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j(\nu-\alpha)}} = \frac{M_0}{1 + \frac{n}{a} e^{j\psi}}; \quad (13-2)$$

donde $M_0 = \frac{B}{A}$ ($M_0 = M$ para $n=0$) y $\psi = \nu - \alpha$.

Transcribamos la expresión (13-2) en la forma siguiente:

$$M + M \frac{n}{a} e^{j\psi} = M_0. \quad (13-3)$$

Para todos los valores de *n* la suma de los dos vectores variables *M* y $M \frac{n}{a} e^{j\psi}$ es igual al vector constante M_0 . En la figura 13-6, esos vectores se muestran para un valor particular *n* y bajo la condición $\psi > 0$.

Para todos los valores de *n* comprendidos entre 0 e ∞ , el vector $M \frac{n}{a} e^{j\psi}$ está desplazado respecto al vector *M* de un ángulo ψ , y el ángulo correspondiente al vértice *M* del triángulo *OMK* es igual a $\pi - \psi$. De aquí se deduce que el extremo del vector *M* se encuentra en el arco de circunferencia *OMK* cuya cuerda es el vector M_0 .

Más abajo se dará un método sencillo para construir esa circunferencia; por ahora veremos cómo hallar el vector *M* para cualquier valor de *n*.

Llevemos desde el punto *O* sobre la cuerda *OK* el segmento *OA* igual, en una escala arbitraria, a la magnitud *a*. Luego tracemos por

su extremo la recta *AN'* que forme un ángulo $-\psi = \alpha - \nu$ con el vector *M*. Prolonguemos la línea *OM* hasta su intersección con la línea *AN'* en el punto *N*. De los dos triángulos semejantes *OAN* y *OMK* ($\angle KOM = \angle AON$; $\angle OMK = \angle OAN = \pi - \psi$) se deduce:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{MK}{OM} = \frac{n}{a}. \quad (13-4)$$

De modo que si el segmento *OA* corresponde a *a*, entonces el segmento *AN* determinará en la misma escala el módulo *n* de la magnitud compleja variable *N*. La recta *AN'* se llama *línea del parámetro variable*. Llevando sobre ella segmentos *AN* correspondientes a los distintos

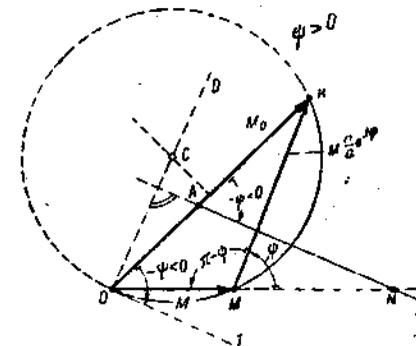


FIG. 13-6

valores de *n* y uniendo sus extremos con el punto *O*, se podrá determinar para cualquier valor de *n* la posición del vector *M*. Al crecer *n*, el punto *M* se acerca al punto *O*. En el límite, para $n = \infty$, la longitud del vector *M* deberá ser, de acuerdo a la (13-2), igual a cero y, por consiguiente, el punto *M* coincidirá con el punto *O*, o sea, que la secante *ON* se transformará en la tangente *OT* y, como el punto *N* estará en el infinito, la *ON* será paralela a la línea del parámetro variable *AN'*. Por lo tanto la perpendicular *OD* a la línea del parámetro variable es al mismo tiempo perpendicular a la tangente en el punto *O* y coincide por consiguiente, en dirección con el diámetro de la circunferencia trazado por el punto *O*. De aquí se deduce el siguiente método para construir un diagrama circular:

- 1) Se traza el vector M_0 que es la cuerda *OK* de la circunferencia;
- 2) Desde el origen del vector M_0 y en su misma dirección se lleva el segmento *OA* igual a *a* en escala arbitraria;
- 3) Formando el ángulo $-\psi = \alpha - \nu$ con el vector M_0 se traza la recta del parámetro variable *AN'*;
- 4) Se traza la *OD* perpendicular a la *AN'*; la recta *OD* coincide con el diámetro de la circunferencia;
- 5) Desde el punto medio del vector M_0 se traza una perpendicular

hasta su intersección con la recta OD en el punto C , que es precisamente el centro de la circunferencia buscada.

Observemos que para determinar el centro del diagrama circular puede no trazarse la línea del parámetro variable, sino construir solamente la tangente OT desde el punto O , que forme con la cuerda OK el ángulo $-\psi$, trazando después la perpendicular OD a la tangente.

13-3. Diagramas circulares para un circuito no ramificado y para un dipolo activo.

Estudiemos el esquema de un circuito no ramificado (fig. 13-7) formado por una conexión en serie de una impedancia constante $Z_c = z_{c1}e^{j\varphi_c}$ y de una impedancia $Z_2 = z_2e^{j\varphi_2}$, con argumento constante φ_2

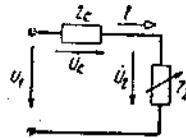


FIG. 13-7

y módulo z_2 , que varía desde 0 hasta ∞ . Supongamos que $\varphi_c > \varphi_2 > 0$. Hallemos el lugar geométrico de los extremos del vector de corriente para una tensión constante \dot{U}_1 . La fórmula de la intensidad

$$I = \frac{\dot{U}_1}{Z_c + Z_2} = \frac{\frac{\dot{U}_1}{Z_c}}{1 + \frac{Z_2}{Z_c} e^{j(\varphi_2 - \varphi_c)}}$$

no se distingue en nada de la (13-2) en la cual M corresponde a \dot{I} , M_0 corresponde a $\frac{\dot{U}_1}{Z_c} = \dot{I}_0$, $n \rightarrow z_2$, $a \rightarrow z_c$ y $\psi \rightarrow (\varphi_2 - \varphi_c)$.

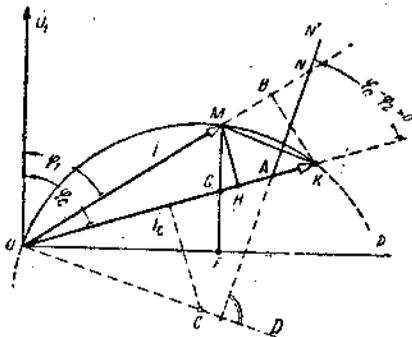


FIG. 13-8

Por consiguiente, el extremo del vector \dot{I} se desplaza sobre el arco de la circunferencia. La construcción del diagrama circular se puede efectuar en el siguiente orden:

1º Elegimos la escala m_{U_1} para la tensión U_1 y trazamos el vector \dot{U}_1 (fig. 13-8).

2º Calculamos la intensidad para $z_2 = 0$ es decir, estando los bornes del receptor en cortocircuito ($n = 0$):

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_1}{Z_c} = \frac{U_1}{z_c} e^{-j\varphi_c}$$

3º Elegimos la escala m_I y trazamos el vector \dot{I}_0 . Este quedará representado por el segmento $OK = \frac{I_0}{m_I}$, desplazado respecto a \dot{U}_1 de un ángulo $-\varphi_c$. El segmento OK es la cuerda del diagrama circular.

4º Elegimos la escala de las impedancias m_z y llevamos sobre la recta OK el segmento $OA = \frac{z_c}{m_z}$.

5º Desde el punto A y formando un ángulo $-\psi = \varphi_c - \varphi_2$ con el vector \dot{I}_0 trazamos la línea del parámetro variable AN' .

6º Desde el origen de las coordenadas trazamos la recta $OD \perp AN'$.

7º Hallamos el centro C del diagrama circular por intersección de la recta OD con la perpendicular levantada desde el centro de la cuerda OK .

8º Trazamos el arco del diagrama circular. Este arco está limitado por la cuerda OK y se encuentra en el mismo semiplano respecto a la cuerda que contiene a la semirecta AN' .

Una construcción sencilla nos da el valor de la intensidad \dot{I} para cualquier valor de z_2 . Se lleva el segmento $AN = \frac{z_2}{m_z}$ y se une el punto N con el punto O . El segmento de esta recta entre el punto O y su intersección con la circunferencia representa al vector de la corriente \dot{I} . Al variar z_2 de 0 a ∞ , el punto M (extremo del vector \dot{I}) se desplaza desde K hasta O .

Comprobaremos cómo se puede obtener de un diagrama circular las diversas magnitudes que caracterizan al régimen del circuito.

Para una tensión U_1 constante en los bornes del circuito, la intensidad es proporcional a la admitancia (conductancia total) del circuito $I = yU_1$, de allí que el segmento OM nos dé la medida de la admitancia del circuito. La escala correspondiente se determina partiendo del régimen de cortocircuito con el cual la admitancia estará dada por el segmento $OK m_y = \frac{1/z_c}{OK}$.

En la misma escala se pueden determinar la conductancia y la susceptancia del circuito, como proyecciones del segmento OM sobre

el eje coincidente con el vector \dot{U}_1 y sobre el eje perpendicular al anterior.

Si $\dot{U}_1 = U_1$ (es decir, el complejo \dot{U}_1 es un número real y el vector \dot{U}_1 se encuentra sobre el eje de los números reales) entonces los complejos \dot{I} e \dot{Y} tendrán argumentos iguales y el diagrama circular de la corriente será, en escala m_u , el diagrama circular de la admitancia compleja del circuito.

Del diagrama tenemos:

$$\overline{MK} = \overline{OK} - \overline{OM} = \frac{1}{m_i} (\dot{I}_c - \dot{I}) = \frac{1}{m_i Z_c} (\dot{U}_1 - \dot{U}_c) = \frac{\dot{U}_2}{m_i Z_c};$$

donde

$$\overline{OK} = \frac{\dot{U}_1}{m_i Z_c} \quad \overline{OM} = \frac{\dot{U}_c}{m_i Z_c} \quad \text{y} \quad \overline{MK} = \frac{\dot{U}_2}{m_i Z_c}.$$

Los segmentos OK , OM y MK son proporcionales a las tensiones U_1 , U_c y U_2 . Las tensiones U_c y U_2 estarán dadas por los segmentos OM y MK en la escala

$$m_{U_c} = m_{U_2} = \frac{U_1}{OK}.$$

La posición de los vectores \dot{U}_c y \dot{U}_2 (no se muestran en el diagrama) se distingue de la posición de los vectores OM y MK en un ángulo φ_c .

La longitud de la perpendicular MF bajada desde el punto M sobre la recta OP , perpendicular al vector de tensión \dot{U}_1 , nos permite determinar la potencia activa P_1 a la entrada del circuito. En efecto,

$$P_1 = U_1 I \cos \varphi_1 = U_1 m_i OM \cos \varphi_1 = U_1 m_i MF = m_{P_1} MF;$$

donde $m_{P_1} = U_1 m_i$ es la escala de la potencia P_1 .

El segmento OF de la recta OP es proporcional a la potencia reactiva Q_1 a la entrada del circuito. En efecto,

$$Q_1 = U_1 I \sin \varphi_1 = U_1 m_i OM \sin \varphi_1 = U_1 m_i OF = m_{Q_1} OF.$$

Demostremos que las potencias, aparente S_2 , activa P_2 y reactiva Q_2 de la carga variable z_2 , pueden determinarse por el segmento MG de la perpendicular MF a la recta OP , o por la longitud de la perpendicular MH bajada desde el punto M sobre la cuerda OK .

Tracemos desde el punto K la perpendicular KB a la recta ON . El área del triángulo OMK es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} OM \cdot KB &= \frac{1}{2} OM \cdot MK \sin \angle KMB = \\ &= \frac{1}{2} \frac{I}{m_i} \cdot \frac{U_2}{m_{U_2}} \sin \angle KMB = \frac{\sin \angle KMB}{2 m_i m_{U_2}} S_2. \end{aligned}$$

El ángulo $\angle KMB = \psi = \varphi_2 - \varphi_c$ no depende de la posición del punto M . En la fórmula obtenida para el área del triángulo OMK todos los

factores, salvo S_2 , son constantes. Por lo tanto, el área del triángulo es proporcional a S_2 . Dado que $\varphi_2 = \text{const}$, el área del triángulo resulta proporcional también a $P_2 = S_2 \cos \varphi_2$ y a $Q_2 = S_2 \sin \varphi_2$. El lado OK del triángulo OMK es constante y por ello su área es proporcional a la altura MH (tomando OK como base) o al segmento MG que es proporcional a MH .

Las escalas m_{S_2} , m_{P_2} y m_{Q_2} pueden determinarse calculando las potencias S_2 , P_2 y Q_2 para cualquier régimen particular y dividiendo los valores obtenidos por el segmento MG .

Por ejemplo, partiendo del régimen señalado en el diagrama con el punto M , tendremos:

$$m_{S_2} = \frac{S_2}{MG} = \frac{U_2 I}{MG} = \frac{MK m_{U_1} \cdot OM m_i}{MG},$$

$$m_{P_2} = \frac{S_2 \cos \varphi_2}{MG} = m_{S_2} \cos \varphi_2,$$

$$m_{Q_2} = \frac{S_2 \sin \varphi_2}{MG} = m_{S_2} \sin \varphi_2.$$

Utilizando el diagrama circular se puede determinar la variación de I , U_c , U_2 , φ_1 , P_1 , P_2 , Q_1 , Q_2 en función de z_2 .

Para ello se toman diversos valores de z_2 , se llevan los segmentos correspondientes AN y se determina la posición del punto M , extremo del vector \dot{I} . Luego se trazan los segmentos MK , MF y MG , se miden sus longitudes y se calculan las magnitudes correspondientes. En general, el diagrama circular permite hallar la variación de todas las magnitudes anteriormente enumeradas en función de una de ellas, considerada como variable independiente. Trazando una serie de segmentos que representen la magnitud tomada como variable independiente, es fácil construir todos los segmentos que nos darán las magnitudes restantes.

El diagrama circular estudiado para un circuito no ramificado es aplicable a cualquier dipolo activo, la impedancia de cuya carga varíe de tal modo que $\varphi_2 = \text{const}$. Este enunciado deriva del teorema del dipolo activo según el cual se puede reducir el esquema de un dipolo activo con carga al esquema de la figura 13-7, en el cual Z_c es la impedancia de entrada del dipolo activo y $U_1 = U_v$, la tensión en vacío en los bornes del dipolo.

13-4. Diagramas circulares para cualquier circuito ramificado.

Si en un circuito ramificado la impedancia de una de las ramas, la segunda, por ejemplo, varía y todas las restantes como asimismo las f.e.m. de las fuentes de energía son invariables, resulta entonces, como ya se vió en el capítulo 3, que las corrientes y las tensiones de cualesquiera de las ramas están entre sí en una relación lineal. En particular,

para la corriente I_1 en la primera rama y la I_2 en la segunda rama, rige la expresión

$$\dot{I}_1 = A + B\dot{I}_2, \quad (13-5)$$

donde A y B son magnitudes complejas constantes.

Si una de las impedancias Z_2 que forma parte de la segunda rama varía de tal modo que φ_2 se mantenga invariable, entonces, y considerando todo el circuito respecto a la impedancia Z_2 como un dipolo activo, llegamos a la conclusión de acuerdo a lo dicho en el subcapítulo 13-3 que el extremo del vector \dot{I}_2 se desplaza sobre un arco de

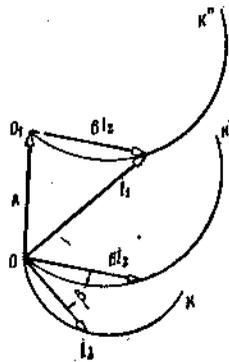


FIG. 13-9

circunferencia. Demostraremos que en este caso el diagrama de la corriente \dot{I}_1 es también un arco de circunferencia. Supongamos que el arco OK (fig. 13-9) represente el diagrama circular de la corriente \dot{I}_2 . Si multiplicamos \dot{I}_2 por $B = be^{j\beta}$, el vector \dot{I}_2 se alargará b veces y girará de $\angle \beta$. Por eso el diagrama del vector $B\dot{I}_2$ se representa por un arco de circunferencia OK' que pasa por el punto O desplazado respecto al arco OK de un ángulo β y cuyo radio es b veces mayor que el radio del arco OK . Trasladando el arco OK' paralelamente al vector A sobre una distancia igual a la longitud del vector A , obtenemos el arco O_1K'' . El extremo del vector $\dot{I}_1 = A + B\dot{I}_2$, como se deduce de la construcción, se halla sobre el arco de circunferencia O_1K'' que es precisamente el diagrama circular de la corriente \dot{I}_1 .

De modo que si en cualquier rama de un circuito ramificado tan complejo como sea, sólo varía el módulo de una de las impedancias y permanecen invariables las f.e.m. de todas las fuentes de alimentación, entonces el extremo del vector de corriente de cualquiera de las ramas describe un diagrama circular. Como las tensiones y las corrientes de las ramas, cualesquiera que éstas sean, están entre sí en función lineal, también para todas las tensiones variables se obtienen diagramas circulares.

Para determinar los complejos A y B de la relación lineal (13-5) es necesario conocer las corrientes \dot{I}_1 e \dot{I}_2 para dos regímenes cualesquiera, con dos valores distintos de z_2 , por ejemplo, para $z_2 = 0$ y $z_2 = \infty$.

Para $z_2 = \infty$ (es decir, estando la rama 2 en circuito abierto) $\dot{I}_2 = 0$. Sea al mismo tiempo $\dot{I} = \dot{I}_{1v}$, entonces tendremos para la relación dada $\dot{I}_{1v} = A + B \cdot 0$, de donde $A = \dot{I}_{1v}$, es decir, la constante A será igual a la intensidad de la corriente en la rama 1 estando la rama 2 en circuito abierto. Sea $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2c}$ e $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1c}$ para $z_2 = 0$, tendremos entonces, sustituyendo esos valores en la (13-5):

$$\dot{I}_{1c} = A + B\dot{I}_{2c} = \dot{I}_{1v} + B\dot{I}_{2c},$$

de donde

$$B = \frac{\dot{I}_{1c} - \dot{I}_{1v}}{\dot{I}_{2c}}$$

y, por consiguiente,

$$\dot{I}_1 = A + B\dot{I}_2 = \dot{I}_{1v} + \frac{\dot{I}_{1c} - \dot{I}_{1v}}{\dot{I}_{2c}} \dot{I}_2. \quad (13-6)$$

De acuerdo al teorema del dipolo activo tenemos

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{2v}}{Z_{2c} + Z_2}; \quad (13-7)$$

donde \dot{U}_{2v} es la tensión en los bornes de la rama 2 cuando ésta está abierta y Z_{2c} es la impedancia de entrada del circuito restante considerado como un dipolo respecto a los bornes de la rama 2.

Sustituyendo la (13-7) en la (13-6) y considerando que $\frac{\dot{U}_{2v}}{\dot{I}_{2c}} = Z_{2c}$, obtendremos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \dot{I}_{1v} + \frac{\dot{I}_{1c} - \dot{I}_{1v}}{\dot{I}_{2c}} \cdot \frac{\dot{U}_{2v}}{Z_{2c} + Z_2} = \\ &= \dot{I}_{1v} + \frac{(\dot{I}_{1c} - \dot{I}_{1v})Z_{2c}}{Z_{2c} + Z_2} = \\ &= \dot{I}_{1v} + \frac{\dot{I}_{1c} - \dot{I}_{1v}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{2c}}} = \dot{I}_{1v} + \frac{\dot{I}_{1c} - \dot{I}_{1v}}{1 + \frac{Z_2}{Z_{2c}} e^{j\psi}} \end{aligned} \right\} \quad (13-8)$$

donde $\psi = \varphi_2 - \varphi_{2c}$.

El segundo término tiene la misma forma que la expresión (13-2) y por consiguiente, puede representarse gráficamente por un diagrama circular con la cuerda $\dot{I}_{1c} - \dot{I}_{1v}$. En el subcapítulo siguiente se da un ejemplo de construcción de un diagrama circular de acuerdo a la fórmula 13-8.

13-5. Diagramas circulares para los cuadripolos activo y pasivo.

Los resultados obtenidos del análisis de los circuitos ramificados en el subcapítulo precedente, se pueden aplicar a los cuadripolos activo y pasivo.

Sea la tensión \dot{U}_1 constante (fig. 13-10). Si el cuadripolo es activo, sean también constantes las tensiones y las corrientes de las fuentes de tensión y de intensidad que forman parte del cuadripolo. Si la impedancia de carga Z_2 del cuadripolo varía de tal modo que φ_2 permanezca invariable, entonces, tanto para la corriente \dot{I}_2 como para la \dot{I}_1 se podrán construir diagramas circulares.

Para construir el diagrama circular de la corriente \dot{I}_1 hay que determinar \dot{I}_{1v} , \dot{I}_{1c} y Z_{2c} .

Tanto para el cuadripolo pasivo como para el activo \dot{I}_{1v} e \dot{I}_{1c} representan los valores de la corriente \dot{I}_1 , estando los bornes 2-2' en cir-

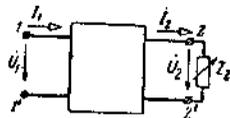


FIG. 13-10

cuito abierto o en cortocircuito respectivamente, con la condición de que a los bornes primarios se aplique la tensión \dot{U}_1 . Para el cuadripolo activo los valores \dot{I}_{1v} e \dot{I}_{1c} no dependen sólo de \dot{U}_1 sino también de los parámetros de las fuentes de tensión y de intensidad que forman parte del cuadripolo. Efectuamos la construcción del diagrama circular en el orden siguiente:

- 1) Elegimos la escala m_{U_1} y trazamos el vector \dot{U}_1 (fig. 13-11);
- 2) Elegimos la escala m_{I_1} y trazamos los vectores \dot{I}_{1v} (segmen-

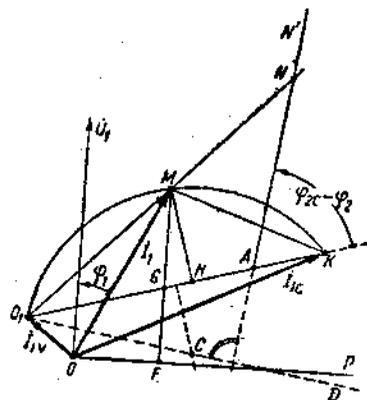


FIG. 13-11

to OO_1) e \dot{I}_c (segmento OK) (la construcción del diagrama circular se efectúa para el caso en que $\varphi_{1v} < 0$ y $\varphi_{1c} > 0$);

3) Unimos los puntos O_1 y K obteniendo la cuerda O_1K ;

4) Elegimos la escala m_z y llevamos sobre la cuerda O_1K el segmento

$$O_1A = \frac{z_{2c}}{m_z}.$$

5) Trazamos la recta del parámetro variable AN' bajo un ángulo $-\psi = \varphi_{2c} - \varphi_2$ respecto a la cuerda O_1K considerada como un segmento cuyo sentido se toma de O_1 a K (la construcción del diagrama circular se da para el caso en que el ángulo $\varphi_{2c} - \varphi_2 > 0$, y por lo tanto en la figura 13-11 se lo lleva respecto a O_1K en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj);

6) Trazamos la recta $O_1D \perp AN'$;

7) La intersección de la perpendicular trazada por el punto medio de la cuerda con la recta O_1D , nos da el centro C del diagrama circular.

Para cualquier valor de z_2 se puede llevar el segmento $AN = \frac{z_2}{m_z}$

y en el punto M de intersección de la recta O_1N con el diagrama circular hallar la posición del extremo del vector de la corriente.

De lo dicho más arriba acerca del diagrama circular para un circuito ramificado (fig. 13-9) se deduce que el arco O_1MK , considerado respecto al punto O_1 , representa el diagrama circular de un dipolo activo proporcionalmente modificado y desplazado de un cierto ángulo. Aquí se comprende bajo el nombre de dipolo activo todo el circuito representado en la figura 13-10 a excepción de la impedancia Z_2 . Es así que la intensidad I_2 , la tensión U_2 , las potencias S_2 , P_2 y Q_2 se determinan por los mismos segmentos de recta que sirvieron a tal fin en el diagrama circular del dipolo. La intensidad I_2 queda determinada por el segmento O_1M , la tensión U_2 por el segmento MK y las potencias S_2 , P_2 y Q_2 por el segmento MH o bien lo que resulta más cómodo, por el segmento MG proporcional al anterior.

Para determinar las escalas de U_2 e I_2 , P_2 y Q_2 hay que calcular los valores de esas magnitudes para unos regímenes particulares cualesquiera y luego dividirlos por las longitudes de los segmentos correspondientes del diagrama. Por ejemplo, calculemos I_{2c} y U_{2v} . En el diagrama, a la intensidad I_{2c} y a la tensión U_{2v} les corresponde la cuerda O_1K . Por consiguiente, la escala $m_{I_2} = \frac{I_{2c}}{O_1K}$ y la escala $m_{U_2} = \frac{U_{2v}}{O_1K}$.

La potencia a la entrada del cuadripolo es proporcional a la perpendicular MF bajada sobre la recta OP . En efecto,

$$P_1 = \dot{U}_1 I_1 \cos \varphi_1 = U_1 m_{I_1} OM \cos \varphi_1 = U_1 m_{I_1} MF = m_{P_1} MF;$$

donde $m_{P_1} = U_1 m_{I_1}$ es la escala de la potencia P_1 .

La potencia reactiva Q_1 estará dada en la misma escala por la longitud del segmento OF .

Para determinar la escala m_{S_2} y las escalas $m_{P_2} = m_{S_2} \cos \varphi_2$ y $m_{Q_2} = m_{S_2} \sin \varphi_2$ hay que determinar S_2 para un régimen particular y dividir el valor obtenido por MG . Así, por ejemplo, partiendo del régimen caracterizado por el punto M , obtenemos:

$$m_{S_2} = \frac{S_2}{MG} = \frac{U_2 I_2}{MG} = \frac{MKm_{U_2} \cdot O_1 M m_{I_2}}{MG}$$

CAPÍTULO XIV

CIRCUITOS TRIFÁSICOS

14-1. Nociones sobre las fuentes de alimentación polifásicas y sobre los circuitos polifásicos.

En la figura 14-1 se representa esquemáticamente un generador de corriente alterna con tres arrollamientos en el estator.

Los conductores de cada arrollamiento están colocados en las ranuras del estator y conectados en serie alternativamente en las caras anterior y posterior del estator (estas conexiones se muestran con líneas llenas y de puntos respectivamente).

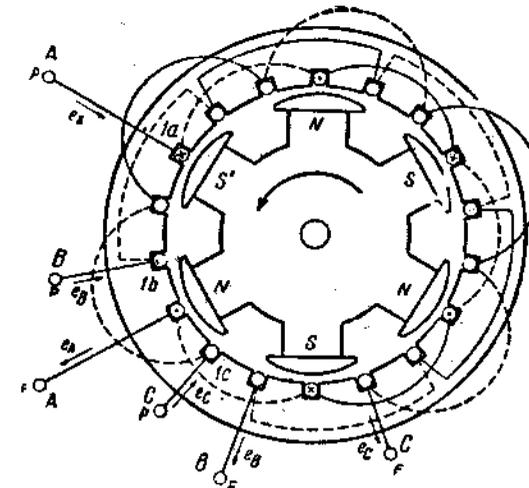


FIG. 14-1

Las f.e.m. inducidas en los arrollamientos alcanzan valores máximos cuando los ejes de los polos del rotor cortan a los conductores del estator. Para los distintos arrollamientos esto se produce en momentos diferentes, de allí que las f.e.m. inducidas no estén en fase.

Los generadores que poseen varios devanados en los que se inducen f.e.m. de igual frecuencia, defasadas una respecto a la otra, se

llaman *generadores polifásicos*. Correspondientemente, las fuentes de alimentación (generadores, transformadores, etc.) que tienen varios bornes (polos) entre los que se originan tensiones, de igual frecuencia, defasadas una respecto a la otra se llaman *fuentes polifásicas de alimentación*. El conjunto de los circuitos eléctricos con fuentes polifásicas de alimentación constituye un *sistema polifásico*. Sus distintas partes se llaman *fases*. Así por ejemplo, a los distintos arrollamientos del generador (fig. 14-1) los llaman arrollamientos de fase o, para mayor brevedad, fases del generador. De modo que el término "fase" se usa como concepto que caracteriza la etapa de un proceso periódico y como denominación de una parte componente de un sistema polifásico de circuitos eléctricos.

Según el número de fases, las fuentes de alimentación y los sistemas de circuitos pueden ser bi, tri, tetrafásicos, etc. Así, el generador con tres devanados (fig. 14-1) es trifásico y los circuitos de corriente alterna estudiados en los capítulos precedentes pueden llamarse monofásicos*.

En las instalaciones que transforman la corriente alterna en corriente continua suelen presentarse circuitos hexafásicos y con menos frecuencia los dodecafásicos. En la automática y en la telemecánica hallan aplicación los circuitos bifásicos. Los otros tipos posibles de circuitos polifásicos no se han difundido.

Los extremos de los arrollamientos de los generadores se denominan "principio" y "fin" de acuerdo a la siguiente condición: para sentidos positivos iguales de las f.e.m. en todos los arrollamientos (desde el principio hasta el fin o viceversa) esas f.e.m. deben estar defasadas simétricamente una con respecto a la otra. Constituyen una excepción en ese sentido los generadores bifásicos (ver más adelante). Aclararemos lo dicho con el ejemplo de un generador trifásico.

Demostremos que las marcas en los extremos de los devanados de fase, en la figura 14-1, satisfacen a la condición establecida, es

* Los sistemas polifásicos y los generadores polifásicos fueron aplicados por primera vez en la práctica por P. N. Iáblochkov para la alimentación de las bujías eléctricas ideadas por él. En las instalaciones creadas por él, los devanados de los generadores polifásicos estaban unidos con líneas desconectadas entre sí eléctricamente y que alimentaban a grupos separados de bujías. Este sistema constituido por circuitos eléctricamente separados, puede considerarse como formado por varios circuitos monofásicos. En la actualidad, en virtud de sus ventajas fundamentales se utilizan sistemas polifásicos de circuitos conectados eléctricamente entre sí. Los métodos de conexión o de enlace de los circuitos se estudian más abajo (14-2). El sistema polifásico representa en esencia un circuito ramificado compuesto, razón por la cual se le suele llamar simplemente *circuito polifásico*. En la electroenergética, en virtud de su mayor economía y perfeccionamiento técnico, se emplean casi exclusivamente los circuitos trifásicos. Todos los eslabones del circuito trifásico, empezando por el generador y terminando por el motor, fueron ideados y elaborados por el ingeniero y hombre de ciencia ruso M. O. Dolivo-Dobrovolsky.

decir que las f.e.m. en las fases A, B y C están desplazadas una respecto a la otra simétricamente en $\frac{1}{3}$ de período. Elijamos los sentidos positivos para las f.e.m. en todos los devanados de tal modo que se dirijan desde el principio hacia el fin. En el momento que corresponde a la posición del rotor indicada en la figura 14-1; la f.e.m. en el devanado A es máxima y tiene el sentido que se ha tomado como positivo, es decir, que en ese momento la f.e.m. en el devanado A pasa por un máximo positivo. El máximo positivo de la f.e.m. en el devanado B se producirá más tarde cuando el rotor haya girado $\frac{1}{3}$ de una revolución y el eje del polo sur S' seccione al conductor b de la fase B. Dado que una revolución del rotor de un generador hexapolar corresponde a tres períodos de la f.e.m., en cualquiera de los devanados, $\frac{1}{3}$ de revolución.

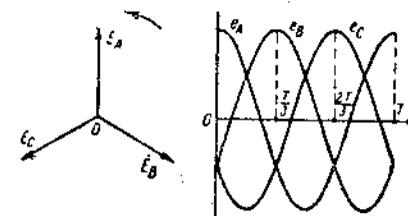


FIG. 14-2

del rotor corresponderá a $\frac{1}{3}$ de período y por consiguiente, la f.e.m. en el devanado B retrasa en fase respecto a la f.e.m. en el devanado A, de $\frac{1}{3}$ de período. Razonando análogamente se puede comprobar que la f.e.m. en el devanado C retrasa de $\frac{1}{3}$ de período respecto a la f.e.m. en el devanado B.

En la figura 14-2 se muestran el diagrama vectorial y el gráfico de los valores instantáneos de las f.e.m. del generador trifásico.

El orden en el cual las f.e.m. en los devanados del generador pasan por valores iguales, por ejemplo, por los máximos positivos, se llama *secuencia de fases* u orden de alternación de las fases. En la figura 14-1,

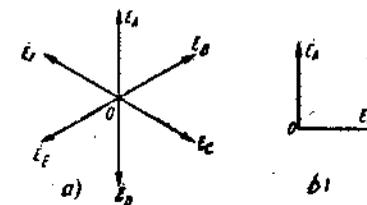


FIG. 14-3

para el sentido de rotación indicado del rotor, tenemos la secuencia de fases ABCABC, etc. Si se invierte el sentido de rotación del rotor se

invertirá también la secuencia de fases. En los generadores, los rotores siempre giran en el mismo sentido, razón por la cual la secuencia de fases nunca varía y puede ser establecida y señalada para siempre. Su señalación se vincula con la denominación de las fases que está dada por las primeras letras del alfabeto de tal modo que la secuencia de las fases corresponda al orden alfabético.

El conjunto de las f.e.m. en los devanados del generador trifásico se llama *sistema trifásico de f.e.m.* Los conjuntos de las f.e.m. (tensiones, corrientes) en los circuitos polifásicos se llaman *sistemas polifásicos de f.e.m.* (tensiones, corrientes). Estos sistemas se llaman *simétricos* si todas las f.e.m. (tensiones, corrientes) son iguales en magnitud y si cada f.e.m. (tensión, corriente) se retrasa de un mismo ángulo de fase respecto a la f.e.m. (tensión, corriente) precedente, ángulo igual a $\frac{2\pi}{m}$ siendo m el número de fases.

En la figura 14-3, *a* se da a título de ejemplo el diagrama vectorial de un sistema simétrico de f.e.m. de un generador hexafásico.

Los generadores bifásicos se fabrican de tal modo que la f.e.m. en uno de los devanados esté desplazada respecto a la f.e.m. del otro devanado, de $\frac{1}{4}$ de período. En la figura 14-3, *b* se puede ver el diagrama vectorial del sistema de f.e.m. de un generador bifásico; es un sistema asimétrico.

14-2. Conexión en estrella y en polígono.

Existen dos maneras fundamentales de unir los devanados de los generadores, transformadores y receptores en los circuitos polifásicos: la conexión en estrella y la conexión poligonal. Una conexión de un generador y de un receptor en estrella se muestra en la figura 14-4 y una conexión en triángulo en la figura 14-5.

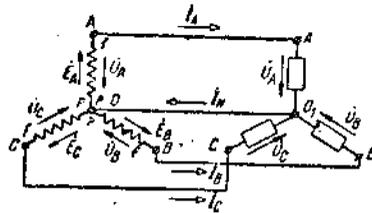


FIG. 14-4

Para realizar una conexión en estrella, todos los "principios" o todos los "finales" de los devanados del generador se reúnen en un punto común. Los puntos comunes de los devanados del generador y de las ramas de la estrella del receptor (carga), se llaman *puntos neutros* y el conductor que los une, *conductor neutro*. Los que unen los devanados del generador con el receptor son los *conductores de línea*.

En la conexión en polígono, los arrollamientos de fase del generador se conectan en serie de modo tal que el "principio" de un arrollamiento se una con el "final" de otro. Los puntos comunes de cada par de arrollamientos de fase del generador y los puntos comunes de cada

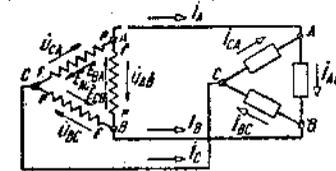


FIG. 14-5

par de ramas del receptor, se unen con los conductores de línea. A primera vista puede parecer que la conexión en polígono (triángulo) de los devanados del generador equivale a un cortocircuito, como sería el caso en una conexión similar de elementos galvánicos. En la realidad, con un sistema simétrico de f.e.m., la suma de las f.e.m. que actúan en el polígono (triángulo) en todo momento es igual a cero. Es fácil comprobarlo examinando el diagrama vectorial y las curvas de valores instantáneos de las f.e.m. para el generador trifásico (fig. 14-2).

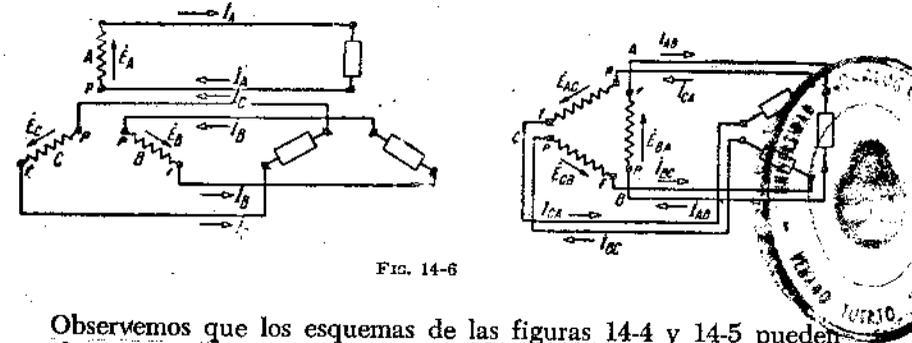


FIG. 14-6

Observemos que los esquemas de las figuras 14-4 y 14-5 pueden considerarse como resultantes de los circuitos monofásicos independientes de la figura 14-6, cuyos conductores contiguos se hubieran unificado.

Los esquemas de conexión de los devanados en las fuentes de alimentación y en los receptores no dependen uno del otro. En un mismo circuito puede haber fuentes de alimentación y receptores (carga) con distintos esquemas de conexiones. Las ramas de la estrella o del polígono del receptor se llaman *fases de receptor*, y sus impedancias, *impedancias de fase*. Las fuerzas electromotrices, inducidas en los devanados del generador o del transformador, las tensiones en sus bornes, las tensiones en las fases del receptor y las corrientes en las mismas se llaman *f.e.m., tensiones y corrientes de fase* (E_f, U_f, I_f). Las tensiones entre los conductores de línea y las corrientes en los mismos se llaman *tensio-*

nes y corrientes de línea (U_l, I_l). Cuando las fases se conectan en estrella las corrientes de línea son iguales a las de fase, $I_l = I_f$. Conectando las fases en polígono, la tensión de línea entre los conductores conectados a una misma fase de la carga o de la fuente de alimentación, es igual a la tensión de fase correspondiente, $U_l = U_f$.

Los sentidos positivos de las corrientes en todos los conductores de línea los elegiremos siempre desde la fuente de alimentación hacia el receptor; y en el neutro, desde el punto neutro del receptor hacia el punto neutro de la fuente de alimentación. Los sentidos positivos de las f.e.m. y de las corrientes en las ramas del triángulo de la fuente de alimentación los tomaremos en el sentido ACBA, y los de las tensiones y corrientes en las ramas del triángulo del receptor en el sentido ABCA, como se ve en la figura 14-5.

× El circuito polifásico y el receptor polifásico son *simétricos* si las impedancias complejas de todas sus fases son iguales. En caso contrario se llaman *asimétricos*.

× Si a un circuito trifásico simétrico se le aplica un sistema simétrico de tensiones, se obtiene un sistema simétrico de corrientes. El *régimen simétrico* de un circuito polifásico es aquel para el cual los sistemas polifásicos de las tensiones y de las corrientes son simétricos.

14-3. Régimen simétrico de un circuito trifásico.

En la figura 14-7 se dan los diagramas topográficos y vectorial de corrientes para un régimen simétrico del circuito de la figura 14-4 y para una carga de carácter inductivo ($\varphi > 0$).

En el conductor neutro no hay corriente:

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

De allí que para un receptor simétrico no se utilice conductor neutro. Las tensiones de línea definidas como diferencias de tensiones de fase,

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A \quad (14-1)$$

son iguales entre sí en magnitud.

Del triángulo equilátero AOB tenemos:

$$U_{AB} = 2U_A \cos \angle OAB = 2U_A \cos 30^\circ,$$

o también

$$U_l = \sqrt{3}U_f \quad (14-2)$$

En la figura 14-8 se dan los diagramas vectoriales de las tensiones y de las corrientes para un régimen simétrico correspondiente al esquema de la figura 14-5 y para $\varphi > 0$. Las corrientes de línea que se definen como diferencias de las corrientes de fase,

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} \quad (14-3)$$

son iguales entre sí en magnitud, siendo

$$I_l = \sqrt{3}I_f \quad (14-4)$$

La potencia activa del receptor trifásico simétrico es

$$P = 3U_f I_f \cos \varphi \quad (14-5)$$

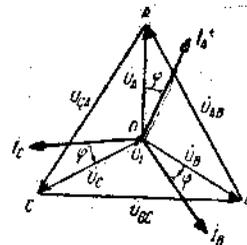


FIG. 14-7

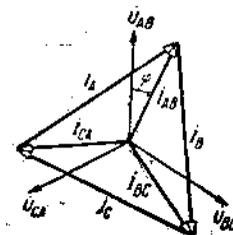


FIG. 14-8

Tomando en cuenta que al conectar las ramas del receptor en estrella, será $U_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}}$ e $I_f = I_l$, y al conectar en triángulo las ramas del receptor será $U_f = U_l$ e $I_f = \frac{I_l}{\sqrt{3}}$ tendremos, independientemente de la forma de la conexión:

$$P = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi \quad (14-6)$$

Debe recordarse que en dicha expresión, φ es la diferencia de fases entre la tensión y la corriente de fase.

Análogamente para las potencias reactiva y aparente del receptor trifásico simétrico tendremos:

$$Q = 3U_f I_f \sin \varphi = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi \quad (14-7)$$

$$S = 3U_f I_f = \sqrt{3}U_l I_l \quad (14-8)$$

Determinaremos la suma de las potencias instantáneas del receptor trifásico para un régimen simétrico. Los valores instantáneos de las tensiones e intensidades de fase pueden anotarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_A &= U_f \sqrt{2} \sin \omega t, & i_A &= I_f \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi); \\ u_B &= U_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right), & i_B &= I_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi - \varphi \right); \\ u_C &= U_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right), & i_C &= I_f \sqrt{2} \sin \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi - \varphi \right). \end{aligned}$$

Escribamos las expresiones para los valores instantáneos de las potencias en cada fase del receptor:

$$p_A = u_A i_A = U_f I_f \cos \varphi - U_f I_f \cos (2\omega t - \varphi);$$

$$p_B = u_B i_B = U_f I_f \cos \varphi - U_f I_f \cos \left(2\omega t - \frac{4}{3}\pi - \varphi \right)$$

$$p_C = u_C i_C = U_f I_f \cos \varphi - U_f I_f \cos \left(2\omega t + \frac{4}{3}\pi - \varphi \right)$$

Si se suman los valores instantáneos de las potencias de las distintas fases, los segundos sumandos en la suma darán cero y la potencia instantánea suma:

$$p = p_A + p_B + p_C = 3U_f I_f \cos \varphi = P$$

no dependerá del tiempo y será igual a la potencia activa.

Los circuitos polifásicos, en los cuales el valor instantáneo de la potencia es constante se llaman *equilibrados*.

Debemos señalar que en el circuito bifásico simétrico (fig 14-9) con un sistema asimétrico de f.e.m. en la fuente de alimentación (fig. 14-3, b), el sistema de corrientes es igualmente asimétrico; sin embargo, el circuito resulta equilibrado dado que la suma de los valores instantáneos de las potencias en las fases es constante. Esto se puede demostrar igual que se demostró el equilibrio del circuito trifásico simétrico.

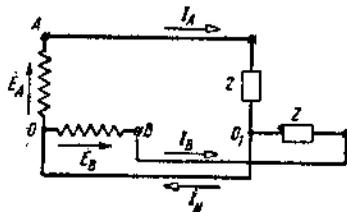


FIG. 14-9

La constancia del valor instantáneo de la potencia crea condiciones favorables para el funcionamiento de los generadores y de los motores desde el punto de vista mecánico, puesto que no existen las pulsaciones del momento de giro que se observan en los generadores y motores monofásicos.

Los regímenes simétricos de los circuitos trifásicos ofrecen indudables ventajas económicas en comparación con los sistemas de tres fases independientes. Estos tienen seis conductores con intensidad $I_l = I_f$. El circuito trifásico, sin neutro, que alimenta los mismos receptores conectados en estrella, posee tres conductores con las mismas intensidades $I_l = I_f$ y tensiones de línea $\sqrt{3}$ veces mayores que las tensiones de línea en un sistema de tres circuitos independientes para el cual $U_l = U_f$. Si los receptores están conectados en triángulo, resulta también un número de conductores dos veces menor que en el otro sistema, siendo al mismo tiempo las intensidades en los conductores de línea $\sqrt{3}$ veces (y no 2) mayores que las intensidades de fase.

14.4. Algunas propiedades de los circuitos trifásicos con distintos esquemas de conexiones.

En los circuitos trifásicos que alimentan a los receptores monofásicos (aparatos de soldadura eléctrica, motores monofásicos, lámparas eléctricas y distintos artefactos de la vida cotidiana), se exige que al variar el número de los receptores, la tensión en sus bornes no varíe en lo posible.

Esa condición se cumple tanto en la conexión de los receptores en estrella con un conductor neutro, como en su conexión en triángulo. En la figura 14-10 se dan, a título de ejemplo, los esquemas correspondientes de conexión de unas lámparas eléctricas. Si se admite que las tensiones en los bornes de la fuente de alimentación (A, B, C y O) se mantienen invariables y si se desprecia la caída de tensión en los conductores, entonces las tensiones en las lámparas en ambos esquemas serán iguales a las tensiones en los bornes de la fuente de alimentación y no variarán, cualquiera sea el número y la potencia de las lámparas conectadas en cada grupo. Si se suprime el conductor neutro en el esquema de la figura 14-10, a, entonces entre el punto neutro O_1 de los receptores y el punto neutro O de la fuente de alimentación

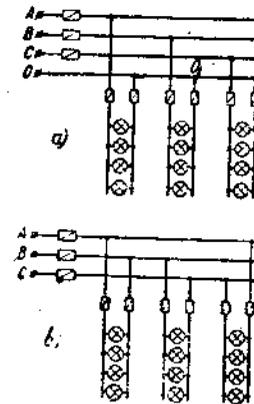


FIG. 14-10

aparecerá una tensión. Las tensiones de fase en las lámparas dependerán de las relaciones entre sus resistencias en los tres grupos y variarán al modificarse el número de lámparas conectadas en cualquiera de los grupos. Por tal motivo no se conectan en estrella grupos de lámparas cuando no hay conductor neutro. Habiendo neutro, y si se quema un fusible en uno de los conductores de la línea principal, digamos en el A (fig. 14-10, a), sólo se apagan las lámparas conectadas con ese conductor; las restantes mantienen su incandescencia normal. En este mismo caso en una conexión en triángulo (fig. 14-10, b), se mantiene

bajo tensión normal un solo grupo de lámparas en la rama BC. Las otras dos ramas del triángulo quedan conectadas en serie alimentándose de los conductores principales B y C. Las lámparas en esas ramas del triángulo tienen una incandescencia completa. Las tensiones entre las ramas AB y CA se distribuyen proporcionalmente a sus resistencias. Cuanto más lámparas estén conectadas en una de las ramas, digamos en la AB, tanto más brillo tendrán las lámparas en la otra rama CA (al aumentar el número de las lámparas conectadas disminuye la resistencia de la rama).

El circuito trifásico con conductor neutro presenta la ventaja de poder alimentar receptores que han sido calculados para distintas tensiones. A los receptores de ese tipo de circuito se les puede aplicar una tensión de línea conectándolos entre conductores de línea y se les aplica una tensión de fase conectándolos entre los conductores de línea y el neutro. En la práctica tienen amplia difusión los circuitos trifásicos con conductores neutros con las siguientes tensiones:

$$U_l = 380 \text{ V}, \quad U_f = 220 \text{ V},$$

$$U_l = 220 \text{ V}, \quad U_f = 127 \text{ V}.$$

y

14-5. Cálculo de los regímenes simétricos para los circuitos trifásicos.

Para familiarizarnos con los cálculos de los regímenes simétricos, veamos en qué orden se realiza el cálculo de las corrientes en el circuito simétrico, cuyo esquema está dado en la figura 14-11. Sean dadas las tensiones simétricas en los bornes de la fuente de alimentación, y las impedancias de todos los elementos del circuito 1, 2, 3 y 4. Para efectuar el cálculo el procedimiento más simple consiste en transformar el esquema, sustituyendo las conexiones en triángulo de la fuente de alimentación y de los elementos 4 por conexiones en estrella. Las impedancias de fase de la estrella simétrica son tres veces menores que las impedancias de fase del triángulo simétrico equivalente. Las tensiones de fase de una fuente de alimentación equivalente conectada en estrella, serán $\sqrt{3}$ veces menores que las tensiones de línea dadas. De modo que se obtiene el esquema representado en la figura 14-12. Conectemos todos los puntos neutros con un conductor que no tenga resistencia.

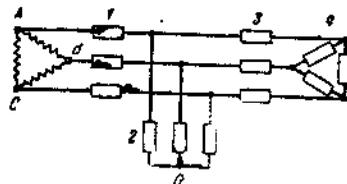


FIG. 14-11

En un régimen simétrico no habrá corriente en el conductor neutro; de allí que no se modifique el régimen del circuito al intercalar el neutro en el esquema.

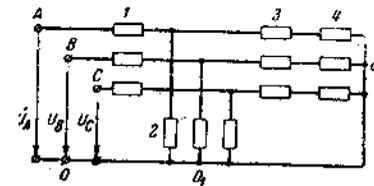


FIG. 14-12

Eliminemos luego en el esquema dos fases, por ejemplo la B y la C. Esto no modificará el régimen de la fase A y las corrientes en ella podrán calcularse fácilmente según el esquema monofásico obtenido (fig. 14-13). Las corrientes en las fases B y C tienen los mismos valores que en la fase A. En las ramas del triángulo 4 son $\sqrt{3}$ veces menores

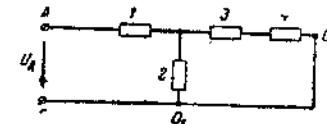


FIG. 14-13

que en los elementos 3 (en cada uno de los elementos de cualquiera de los grupos, la corriente está defasada respecto a las corrientes en los otros elementos del mismo grupo, de ángulos iguales a $\pm 120^\circ$).

14-6. Cálculo de los regímenes asimétricos en los circuitos trifásicos con carga estática.

El cálculo de los regímenes simétricos, cuando los receptores son motores trifásicos (carga dinámica) no presenta dificultades. El motor puede reemplazarse por una carga estática (inmóvil) equivalente, que conste de tres impedancias iguales conectadas en estrella o en triángulo. Habiendo una tensión asimétrica en los bornes del motor, las corrientes no pueden calcularse con un esquema formado por tres impedancias iguales. Análoga es la situación con el cálculo de las caídas de tensión en el generador. Para un régimen simétrico, las caídas de tensión en las fases del generador son simétricas y pueden calcularse como tensiones en tres impedancias iguales. Con un régimen asimétrico no se puede utilizar este procedimiento. Actualmente, para calcular regímenes asimétricos en circuitos trifásicos con motores trifásicos, se aplica,

casi con exclusividad, un método especial de cálculo, el de las componentes simétricas que se estudia en el capítulo próximo.

Aquí nos limitaremos a examinar los regímenes simétricos de los circuitos en las dos condiciones siguientes:

- 1) cuando sólo existe una carga estática;
- 2) cuando las caídas de tensión en los generadores no se toman en cuenta.

Con las dos limitaciones indicadas, los cálculos del régimen asimétrico de los circuitos trifásicos no contienen nada nuevo en principio y pueden ser efectuados por cualquiera de los métodos vistos en los capítulos precedentes. Ilustraremos lo dicho con una serie de ejemplos.

Sean dadas las tensiones de fase asimétricas \dot{U}_A , \dot{U}_B y \dot{U}_C en los bornes de un receptor asimétrico (fig. 14-14). Determinemos las corrientes.

Las tensiones dadas siempre se pueden atribuir a unas fuentes de tensión (indicadas con líneas de puntos) cuyas f.e.m. sean $\dot{E}_A = \dot{U}_A$, $\dot{E}_B = \dot{U}_B$ y $\dot{E}_C = \dot{U}_C$.

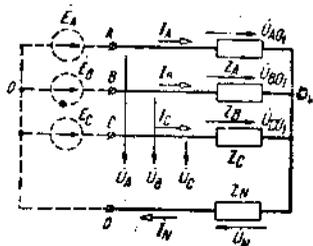


Fig. 14-14

El esquema tiene dos nudos, de modo que el método de cálculo más sencillo será el de los potenciales de nudos.

Designemos con $\dot{U}_{O_1O} = \dot{U}_N$ la tensión entre los puntos neutros del receptor y de la fuente de alimentación, entonces

$$\dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N} \quad (14-9)$$

donde Y_A , Y_B , Y_C , Y_N son las admitancias de las ramas;

$$\begin{cases} \dot{I}_A = Y_A(\dot{U}_A - \dot{U}_N), \\ \dot{I}_B = Y_B(\dot{U}_B - \dot{U}_N), \\ \dot{I}_C = Y_C(\dot{U}_C - \dot{U}_N), \\ \dot{I}_N = Y_N \dot{U}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \end{cases} \quad (14-10)$$

En un caso límite en que $Z_N = 0$ ó $Y_N = \infty$, tendremos $\dot{U}_N = 0$ y por consiguiente, las tensiones en las fases del receptor serán iguales a las tensiones de fase de la fuente de alimentación. En esas condi-

ciones, la corriente en cada fase puede calcularse por la ley de Ohm independientemente de las corrientes en las fases restantes.

No existiendo conductor neutro, el cálculo se puede efectuar en el mismo orden. Variará solamente la expresión de la tensión \dot{U}_N , por cuanto $Y_N = 0$:

$$\dot{U}_N = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C} \quad (14-11)$$

Sin embargo, al no existir neutro, suelen estar dadas las tensiones de línea, y no las de fase, en los bornes del circuito.

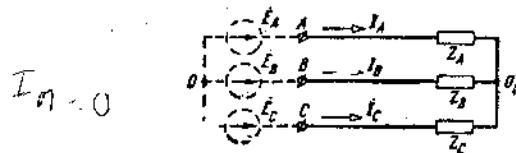


Fig. 14-15

En tales condiciones, pueden tomarse arbitrariamente las f.e.m. de las tres fuentes de tensión introducidas (fig. 14-15) con tal de que sus diferencias sean iguales a las tensiones de línea dadas. Se puede, por ejemplo, igualar a cero la f.e.m. de la fase A; y las f.e.m. de las fuentes restantes, igualar a las tensiones de línea dadas:

$$\dot{E}_A = 0, \quad \dot{E}_B = \dot{U}_{BA}, \quad \dot{E}_C = \dot{U}_{CA}.$$

Entonces la tensión \dot{U}_N entre los puntos neutros O_1 y O del esquema es igual en magnitud y de signo contrario a la tensión desconocida \dot{U}_{AO_1} en la fase del receptor.

$$\dot{U}_{AO_1} = -\dot{U}_N = -\frac{Y_B \dot{E}_B + Y_C \dot{E}_C}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{Y_B \dot{U}_{AB} + Y_C \dot{U}_{AC}}{Y_A + Y_B + Y_C} \quad (14-12)$$

Supuesto que en las fuentes de tensión (fig. 14-15) son $\dot{E}_A = \dot{U}_{AB}$, $\dot{E}_B = 0$ y $\dot{E}_C = \dot{U}_{CB}$, tendremos:

$$\dot{U}_{BO_1} = -\dot{U}_N = \frac{Y_C \dot{U}_{BC} + Y_A \dot{U}_{BA}}{Y_A + Y_B + Y_C} \quad (14-13)$$

Análogamente encontraremos:

$$\dot{U}_{CO_1} = \frac{Y_A \dot{U}_{CA} + Y_B \dot{U}_{CB}}{Y_A + Y_B + Y_C} \quad (14-14)$$

Una vez determinadas por las fórmulas (14-12)-(14-14), dos tensiones de fase cualesquiera del receptor, se pueden encontrar las corrientes en esas dos fases aplicando la ley de Ohm. La corriente en la tercera fase estará dada por la ecuación

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Las tensiones de fase del receptor se determinan en el diagrama topográfico por la posición del punto neutro del receptor.

Es particularmente fácil hallar su posición cuando el receptor es simétrico $Y_A = Y_B = Y_C$.

En esas condiciones el vector de tensión

$$\dot{U}_{O_1A} = -\dot{U}_{AO_1} = \frac{-Y_B \dot{U}_{AB} - Y_C \dot{U}_{AC}}{Y_A + Y_B + Y_C} = \frac{\dot{U}_{BA} + \dot{U}_{CA}}{3}$$

es igual a un tercio de la diagonal del paralelogramo (fig. 14-16). De aquí se deduce que el punto neutro en el diagrama topográfico corresponde al centro de gravedad del triángulo de las tensiones de línea.

Examinemos un esquema simple con un receptor asimétrico conectado en estrella (fig. 14-17). Si se conocen las tensiones de línea entre los bornes A_1, B_1, C_1 a los que están conectadas las impedancias del receptor, el problema de determinar las corrientes resulta elemental. La corriente en cada rama del triángulo se halla por la ley de Ohm y luego se determinan las corrientes en los conductores de la línea de alimentación.

Sin embargo, comúnmente se conocen las tensiones en los bornes A, B, C de la fuente de alimentación y no en los del receptor, con lo

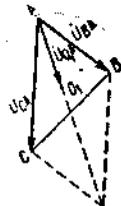


FIG. 14-16

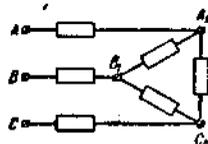


FIG. 14-17

cual el cálculo algo se complica. Lo más sencillo es entonces reemplazar el triángulo por una estrella equivalente; el esquema adquiere la forma de la figura 14-15 y las corrientes se calculan como ya se indicó. Halladas las corrientes se determinan las tensiones en los bornes del triángulo del esquema inicial (fig. 14-17) y luego se calculan las corrientes en sus ramas.

Conviene recurrir a la transformación de esquemas también cuando se trata de varios receptores con distintos esquemas de conexión. Así, por ejemplo, en el circuito representado en la figura 14-18, debe trans-

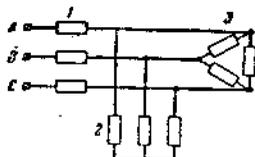


FIG. 14-18

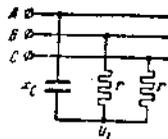


FIG. 14-19

formarse la estrella 2 en un triángulo equivalente cuyas ramas estén en paralelo con las del triángulo 3. Sustituyendo cada par de ramas en paralelo por una sola, se obtiene el esquema visto anteriormente (fig. 14-17).

Cuando entre los elementos del circuito hay inductancia mutua, el cálculo se puede efectuar estableciendo las ecuaciones de Kirchhoff para las corrientes en las ramas o para las corrientes de malla.

En algunos casos suele convenir eliminar los acoplamientos inductivos, pasando a esquemas equivalentes (ver 12-6).

Veamos ahora un ejemplo en el que se aplica el teorema del dipolo activo con la construcción del diagrama circular. Examinemos cómo varían las tensiones de fase en el circuito (fig. 14-19) si las tensiones de línea son constantes y simétricas, $r_B = r_C = r = \text{const}$ y la reactancia capacitiva x_C en la fase A varía de 0 hasta ∞ . Consideremos todo el circuito trifásico, respecto a los bornes de la rama con reactancia va-

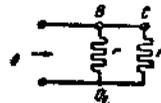


FIG. 14-20

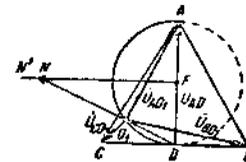


FIG. 14-21

riable x_C , como un dipolo activo. Al determinar la impedancia de entrada del dipolo, Z_{en} , los bornes A, B, C , deben considerarse en cortocircuito (fig. 14-20), ya que la tensión constante en ellos corresponde a una resistencia interna nula de la fuente de alimentación. Evidentemente $Z_{en} = \frac{r}{2}$. La tensión U_{AO_1} en vacío en los bornes del dipolo activo la determinaremos del diagrama topográfico. Cuando $x_C = \infty$, la tensión U_{BO} se distribuye uniformemente entre las resistencias r_A y r_B , y el punto O_1 del diagrama topográfico (fig. 14-21) se halla en el punto medio del segmento BC , de tal modo que para $x_C = \infty$, $\dot{U}_{AO_1} = \dot{U}_{AD}$. El esquema de cálculo con el dipolo activo está representado en la figura 14-22.

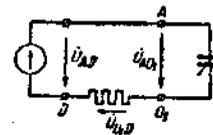


FIG. 14-22

Del esquema se ve que la tensión \dot{U}_{O_1D} adelanta en fase respecto a la tensión \dot{U}_{AO_1} , del ángulo $\frac{\pi}{2}$. La suma $\dot{U}_{AO_1} + \dot{U}_{O_1D}$ es constante e igual a \dot{U}_{AD} .

Por consiguiente, al variar x_c , el vértice del triángulo AO_1D se desplaza sobre el arco de circunferencia que es precisamente el diagrama circular del potencial del punto O_1 . A fin de poder hallar la posición del punto O_1 para cualquier valor de x_c hay que determinar gráficamente los ángulos φ entre la tensión \dot{U}_{AD} y la corriente en el esquema (fig. 14-22). A tal efecto llevemos en escala, desde el punto D , el valor $r/2$ (segmento DF), y sobre la FN' perpendicular a DF , llevemos en la misma escala la reactancia variable x_c (segmento FN) y unamos el punto N con el punto D .

Las tensiones \dot{U}_{FO_1} y \dot{U}_{CO_1} en las resistencias iguales en magnitud $r_B = r_C$, en las fases B y C , resultan desiguales. Si las resistencias son lámparas, la de la fase B tendrá más brillo que la de la fase C . Se puede utilizar como indicador de secuencia de fases dos lámparas y un condensador conectados según el esquema de la figura 14-23, *a*.

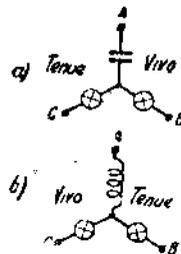


FIG. 14-23

La tensión en la lámpara que tiene más brillo adelanta en fase a la tensión que hay en la lámpara de brillo menor. En lugar de un condensador se puede conectar una bobina (fig. 14-23, *b*). La incandescencia de las lámparas también será desigual. Pero, esta vez tendrá más brillo la lámpara cuya tensión retrasa en fase respecto a la tensión de la otra. Esto se puede demostrar, sustituyendo en el esquema de la figura 14-19 la capacidad variable por una inductancia variable. En este caso, el lugar geométrico del potencial del punto O_1 será el arco de circunferencia señalado con línea de puntos en la figura 14-21.

Si en la fase A ; en lugar de una reactancia hay una resistencia activa que varía desde 0 hasta ∞ , la tensión \dot{U}_{AO_1} en el esquema de la figura 14-22 estará en fase con la tensión \dot{U}_{AD} y el lugar geométrico del potencial del punto O_1 será la recta AD .

14-7. Esquemas equivalentes de las líneas trifásicas.

Para simplificar el problema de los esquemas equivalentes de una línea, examinemos separadamente los distintos aspectos del proceso electromagnético. Consideremos primero el campo magnético, y no tomemos en cuenta ni el campo eléctrico ni la transformación de la energía

electromagnética en calor (supongamos las resistencias de los conductores de la línea iguales a cero).

En la figura 14-24 se muestra una línea trifásica con su extremo en cortocircuito. Tres conductores de línea forman con el neutro tres lazos cuyos planos se han señalado con rayados distintos.

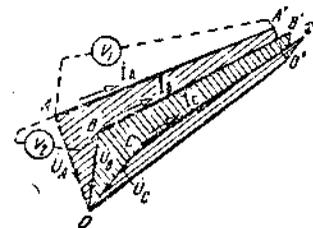


FIG. 14-24

Las tensiones y las corrientes de fase están ligadas por las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_A &= j\omega L_A \dot{I}_A + j\omega M_{AB} \dot{I}_B + j\omega M_{AC} \dot{I}_C \\ \dot{U}_B &= j\omega M_{BA} \dot{I}_A + j\omega L_B \dot{I}_B + j\omega M_{BC} \dot{I}_C \\ \dot{U}_C &= j\omega M_{CA} \dot{I}_A + j\omega M_{CB} \dot{I}_B + j\omega L_C \dot{I}_C \end{aligned} \right\} \quad (14-15)$$

donde L y M con sus distintos subíndices son las inductancias propias y mutuas de los lazos examinados.

De estas ecuaciones se ve que el campo magnético de la línea puede ser tomado en cuenta en un esquema equivalente tal como el de la figura 14-25.

Examinemos ahora una línea sin neutro. Supongamos que también esté en cortocircuito en el extremo. Completamos idealmente esa línea por un neutro, considerando que por él se cierran las corrientes de línea cuya suma es igual a cero.

En este caso también se puede, examinando la figura 14-24, obtener las ecuaciones (14-15) y el mismo esquema equivalente (fig. 14-25), pero sin conductor neutro (dado que $I_N = 0$).

Escribamos las ecuaciones para las tensiones de línea, tomando las diferencias de las tensiones de fase, determinadas por las ecuaciones (14-15):

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= j\omega(L_A - M_{BA}) \dot{I}_A + j\omega(M_{AB} - L_B) \dot{I}_B + j\omega(M_{AC} - M_{BC}) \dot{I}_C \\ \dot{U}_{BC} &= j\omega(M_{BA} - M_{CA}) \dot{I}_A + j\omega(L_B - M_{CB}) \dot{I}_B + j\omega(M_{BC} - L_C) \dot{I}_C \\ \dot{U}_{CA} &= j\omega(M_{CA} - L_A) \dot{I}_A + j\omega(M_{CB} - M_{AB}) \dot{I}_B + j\omega(L_C - M_{AC}) \dot{I}_C \end{aligned} \right\} \quad (14-16)$$

A primera vista puede parecer contradictorio, puesto que las tensiones de línea, a la entrada de la línea, resultan vinculadas con las

inductancias propias y mutuas de los lazos, cuyos valores dependen de la posición del conductor neutro elegida arbitrariamente. En realidad no hay tal contradicción. Sustituycamos $\dot{I}_C = -\dot{I}_A - \dot{I}_B$ en la ecuación dada para \dot{U}_{AB} , y obtendremos:

$$\dot{U}_{AB} = j\omega(L_A - M_{BA} - M_{AC} + M_{BC})\dot{I}_A + j\omega(M_{AB} - L_B - M_{AC} + M_{BC})\dot{I}_B.$$

Aplicando las fórmulas de las inductancias propias y mutuas de las líneas bifilares (III parte del curso), se puede demostrar que las expresiones entre paréntesis no dependen de la posición del neutro.

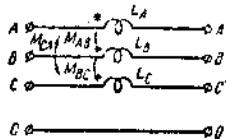


FIG. 14-25

De modo que la posición arbitraria del conductor neutro no ejerce influencia en la expresión \dot{U}_{AB} . Análoga deducción se puede hacer en lo que se refiere a las tensiones \dot{U}_{BC} y \dot{U}_{CA} .

Interesa destacar que si se aumentan o se disminuyen todas las inductancias propias y mutuas en una misma magnitud arbitraria, ello no ejercerá ninguna influencia en el vínculo entre las tensiones y las corrientes de línea, puesto que aquellas entran en todos los términos de las ecuaciones (14-16) en forma de diferencias.

Observemos también que el conductor neutro introducido puede hacerse coincidir con uno de los conductores de línea, por ejemplo en la fase C. Entonces sólo resultan dos lazos, formados por los conductores A y B con el conductor C y en el esquema equivalente sólo habrá dos elementos L_A y L_B que tengan la inductancia mutua M_{AB} ($L_C = M_{BC} = M_{CA} = 0$).

Para una línea con neutro se puede confeccionar más de un esquema equivalente (fig. 14-25). Se puede elegir el sentido positivo de la corriente I_N en el neutro, igual a los sentidos positivos de las corrientes en los conductores de línea y considerar que las corrientes \dot{I}_A , \dot{I}_B , \dot{I}_C e \dot{I}_N cuya suma es igual a cero, se cierran en un quinto conductor dispuesto arbitrariamente.

Se obtendrán cuatro lazos y el esquema equivalente de la línea tendrá cuatro inductancias propias y cuatro mutuas.

En vista de que para considerar el campo magnético de la línea existen cantidad de esquemas equivalentes y en los distintos esquemas se obtienen diferencias de potenciales $\phi_A - \phi_{A'}$, $\phi_B - \phi_{B'}$, $\phi_C - \phi_{C'}$ distintas, se puede plantear el problema de los valores reales de las tensiones entre los extremos de los conductores A y A', B y B', C y C'.

Es oportuno recordar que la tensión entre puntos cualesquiera depende no sólo de la posición de esos puntos sino también del trayecto a lo largo del cual se determina (subcap. 8-1). Para distintas posiciones de los conductores del voltímetro V_1 conectados a los extremos del conductor A de la línea (con líneas de puntos en la fig. 14-24), las indicaciones del voltímetro no serán iguales puesto que son distintas las f.e.m. inducidas por el campo magnético variable en el circuito del voltímetro. No se puede pues plantear el problema de una tensión determinada entre los extremos de un conductor de la línea sin estipular el trayecto a lo largo del cual dicha tensión se determina. En los esquemas equivalentes de la línea no se puede tomar en cuenta esa circunstancia dado que como todo esquema, estos son "potenciales" (ver subcap. 8-1). Para cada uno de ellos la tensión entre puntos cualesquiera se determina en forma uniforme, como una diferencia de potenciales de dichos puntos. Sin embargo, en la práctica el problema de la tensión entre los extremos de un mismo conductor no ofrece interés. En cambio, ofrece interés práctico la tensión entre los distintos conductores de la línea en cualquier sección, por ejemplo, la tensión medida por el voltímetro V_2 . La longitud de los conductores por medio de los cuales se conecta el voltímetro V_2 a la línea, es mucho menor que la de los conductores necesarios para la conexión del V_1 . En el presente caso (para una frecuencia en la línea $f = 50$ c/s) las variaciones de la f.e.m. inducida en el circuito del voltímetro, para las posibles variaciones de posición de sus conductores, son pequeñas y no repercuten en las indicaciones del voltímetro, y la tensión medida puede considerarse como la diferencia de potenciales $\phi_A - \phi_B$ entre los puntos A y B de los esquemas equivalentes.

Las líneas de alta tensión no tienen conductor neutro. Para que constituyan elementos simétricos de un circuito trifásico y no originen asimetría en el régimen, se las ejecuta con transposición (rotación)

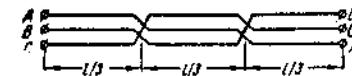


FIG. 14-26

de los conductores (fig. 14-26). Toda la longitud de la línea se divide en cierto número de partes iguales, que sea múltiplo de tres.

Cada conductor ocupa en los tres sectores las tres posiciones distintas posibles de modo que los conductores se encuentran en condiciones iguales y $L_A = L_B = L_C = L$ y $M_{AB} = M_{BC} = M_{CA} = M$. Las ecuaciones (14-15), considerando que $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, toman la forma siguiente:

$$\dot{U}_A = j\omega(L - M)\dot{I}_A = j\omega L_f \dot{I}_A,$$

$$\dot{U}_B = j\omega L_f \dot{I}_B,$$

$$\dot{U}_C = j\omega L_f \dot{I}_C,$$

donde $L_f = L - M$ se llama *inductancia de fase* de una línea trifásica simétrica.

En la figura 14-27 se muestra el esquema equivalente que toma en cuenta el campo magnético de una línea simétrica sin neutro.

En las líneas de alta frecuencia el papel de conductor neutro lo suele desempeñar la tierra (por ejemplo, cuando están puestos a tierra los puntos neutros de los transformadores conectados a la línea). La corriente en la tierra se suele considerar repartida en tres conductores

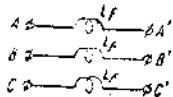


FIG. 14-27

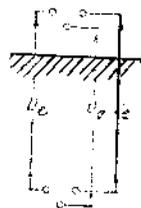


FIG. 14-28

ficticios cuyos ejes se encuentran a distancias D_c de los ejes de los conductores de la línea (ver fig. 14-28). Esta distancia es llamada *profundidad equivalente de la corriente de retorno*. Depende de la frecuencia de la corriente alterna y de la conductividad del suelo (para una frecuencia de 50 c/s se toma como valor medio $D_c = 1\ 000$ m). Considerando de esta manera el paso de la corriente en la tierra, resultan tres lazos. De allí que para tomar en cuenta en el cálculo el campo magnético de la línea, es válido el esquema equivalente de la figura 14-25. En dicho esquema, existiendo transposición de conductores, será:

$$L_A = L_B = L_C = L_f$$

y

$$M_{AB} = M_{BC} = M_{CA} = M_f$$

donde L_f y M_f son las inductancias propias y mutuas de los lazos formados por los conductores de línea y por los conductores ficticios en la tierra.

Las ecuaciones (14-15), tomando en cuenta la relación $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N$, se transforman en las siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= j\omega L_f \dot{I}_A + j\omega M_f (\dot{I}_B + \dot{I}_C) = j\omega L_f \dot{I}_A + j\omega M_f (\dot{I}_N - \dot{I}_A) = \\ &= j\omega (L_f - M_f) \dot{I}_A + j\omega M_f \dot{I}_N; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_B = j\omega (L_f - M_f) \dot{I}_B + j\omega M_f \dot{I}_N;$$

$$\dot{U}_C = j\omega (L_f - M_f) \dot{I}_C + j\omega M_f \dot{I}_N.$$

De estas ecuaciones se ve que para considerar el campo magnético de la línea simétrica considerada, es válido el esquema de la figura 14-29 en el cual $L_f = L_f - M_f$.

Debe destacarse que ese valor de L_f prácticamente no se distingue del determinado anteriormente $L_f = L - M$.

Pasemos ahora a estudiar el campo eléctrico de la línea. En la figura 14-30 se muestra la sección transversal de una línea trifásica. Con el campo eléctrico de la línea están vinculadas las cargas en las superficies de los conductores de la línea y en la superficie de la tierra.

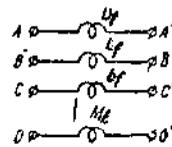


FIG. 14-29

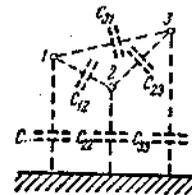


FIG. 14-30

Para su cálculo se introducen entre todos los conductores y la tierra, capacidades parciales indicadas en la figura 14-30 con líneas de puntos (ver 4-4). Las capacidades parciales dependen de las dimensiones de los conductores, de la disposición de unos respecto a los otros y respecto a la tierra. Para una línea con transposición de conductores tenemos:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = C_0$$

y

$$C_{12} = C_{23} = C_{31} = C_m.$$

De modo que para tomar en cuenta en el cálculo el campo eléctrico, es válido el esquema equivalente de la figura 14-31.

Transformando el triángulo de capacidades en una estrella, obtendremos el esquema representado en la figura 14-32. En aquellos regí-

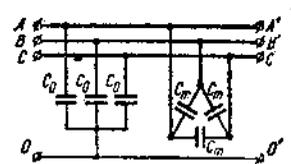


FIG. 14-31

menes en los que no pasa corriente por la tierra, los potenciales de los puntos O y O_1 son iguales.

Se pueden unir los puntos O y O_1 y sustituir dos estrellas de capacidades por una estrella equivalente, la capacidad de cada una de cuyas ramas $C_f = C_0 + 3C_m$ se llamará *capacidad de fase de la línea*. Formemos ahora un esquema equivalente general que incluya los campos magnético y eléctrico y también las resistencias de la línea.

Para cualquier sector de la línea tan pequeño como se quiera, hay que introducir en el esquema las capacidades parciales, las inductan-

cias propias y mutuas y las resistencias y tomar en cuenta también la conductancia de la aislación.

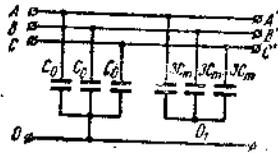


FIG. 14-32

Se obtendrá así un esquema con un número infinito de elementos. Los parámetros de la línea estarán distribuidos a lo largo de toda su longitud. En el capítulo I, volumen II, se estudia la línea como un circuito con parámetros distribuidos. En los cálculos prácticos, cuando la longitud de una línea aérea no sobrepasa los 300 km y la de un cable no sobrepasa los 50 km, son perfectamente aplicables los esquemas

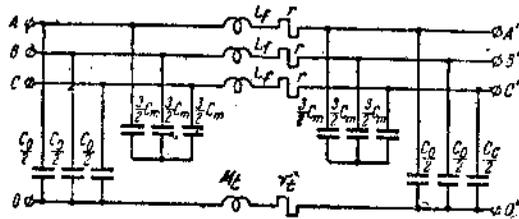


FIG. 14-33

simplificados de cálculo, en los que las capacidades parciales se suponen concentradas, sea en el medio de la línea, sea repartidas por igual en sus extremos. Comúnmente se desprecia la conductancia de la aislación.

En la figura 14-33 se representa un esquema equivalente completo de una línea simétrica en la que las capacidades parciales están situadas en sus extremos. Aquí r_t es la resistencia activa en la tierra.

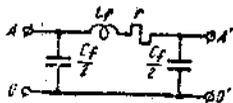


FIG. 14-34

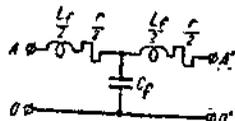


FIG. 14-35

En los regímenes simétricos se puede utilizar el esquema equivalente para una sola fase (fig. 14-34). Si se consideran todas las capacidades parciales concentradas en el medio de la línea se obtendrá, para el régimen simétrico, el esquema de la figura 14-35.

En las líneas aéreas con una tensión inferior a 35 kV, la influencia

de las capacidades de las líneas en el régimen del circuito es reducida y no suele tomarse en cuenta.

En algunos tipos de líneas de baja tensión el cálculo puede reducirse al de la resistencia activa de los conductores.

14-8. Medición de la potencia en los circuitos trifásicos.

Veamos qué cantidad de vatímetros debe haber para que se pueda medir la potencia activa en los circuitos trifásicos, en cualquier régimen asimétrico.

En la figura 14-36 se ha representado convencionalmente por un rectángulo, un circuito todo lo complejo que se quiera, alimentado por una línea trifásica con neutro. Las tensiones de fase a la entrada de la

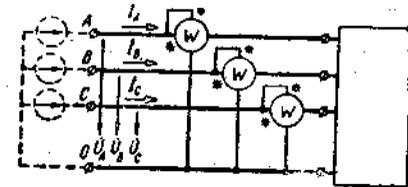


FIG. 14-36

línea siempre se pueden atribuir a tres fuentes de tensión (representadas con líneas de punto). De aquí se deduce que para medir la potencia activa en una línea trifásica con conductor neutro, deben tenerse tres vatímetros conectados de la manera que se indica en la figura 14-36 (los vatímetros miden las potencias activas de las fuentes de tensión).

Si la línea no tiene conductor neutro, figura 14-37, las tensiones lineales en sus bornes de entrada siempre se pueden considerar como

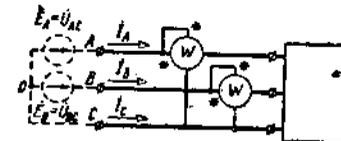


FIG. 14-37

obtenidas de dos fuentes de tensión, conectadas como se muestra en la figura 14-37. Por consiguiente, la potencia activa de transmisión de la energía en una línea sin neutro puede medirse con dos vatímetros.

Conviene tener presente que pueden producirse en el circuito regímenes tales en que la aguja de uno u otro vatímetro en los esquemas de las figuras 14-36 y 14-37 se desvíe en sentido inverso. Entonces habrá que invertir la conexión de los circuitos (devanados) de la tensión o de la corriente del vatímetro correspondiente. La potencia que

se mida entonces se deberá considerar negativa. Más abajo se describe un caso similar.

Estudieemos en qué forma varía la potencia, medida por cada uno de los vatímetros en el esquema de la figura 14-37, en función de la diferencia de fases entre las tensiones y las corrientes en el caso particular de un régimen simétrico. En la figura 14-38 se da el diagrama vectorial de las corrientes y de las tensiones. Las líneas que unen el centro de gravedad del triángulo de las tensiones de línea con sus vértices, pueden considerarse como las tensiones de fase de un receptor equivalente conectado en estrella.

De acuerdo al esquema de conexión de los bornes homónimos de los vatímetros y al diagrama vectorial, podemos escribir:

$$P_1 = U_{AC} I_A \cos \angle \dot{U}_{AC}, \dot{I}_A = U_l I_l \cos (30^\circ - \varphi);$$

$$P_2 = U_{BC} I_B \cos \angle \dot{U}_{BC}, \dot{I}_B = U_l I_l \cos (30^\circ + \varphi);$$

$$P_1 + P_2 = U_l I_l 2 \cos 30^\circ \cos \varphi = \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi.$$

Como se deduce de esas expresiones, las indicaciones de los vatímetros sólo deben ser iguales para $\varphi = 0$. Para $\varphi = 60^\circ$, tenemos $P_2 = 0$; y para $\varphi = -60^\circ$, tenemos $P_1 = 0$. Siendo $\varphi > 60^\circ$, obtenemos $P_2 < 0$ y siendo $\varphi < -60^\circ$ será $P_1 < 0$. Para $\varphi = \pm 90^\circ$, es $P_2 = -P_1$.

De modo que para $|\varphi| > 60^\circ$ la aguja de uno de los vatímetros se desvía en sentido inverso.

Para medir la potencia en un régimen simétrico es suficiente disponer de un vatímetro. Si el punto neutro del receptor es accesible, entonces el vatímetro se conectará del mismo modo que cualquiera de los tres de la figura 14-36.

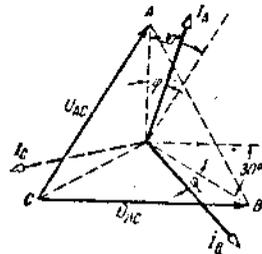


FIG. 14-38

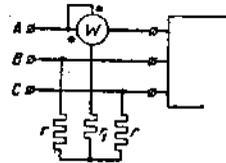


FIG. 14-39

Si el punto neutro es inaccesible, se crea un punto neutro artificial conectando en estrella tres resistencias iguales. Se intercala en una de las resistencias el circuito de tensión del vatímetro (fig. 14-39), debiendo la suma de la resistencia r_1 y de la del circuito de tensión del vatímetro ser igual a las resistencias r de las otras ramas de la estrella. La potencia que mide el vatímetro constituye $\frac{1}{3}$ de la potencia total del receptor.

En un régimen simétrico, con un solo vatímetro se puede medir la potencia reactiva si se lo conecta según el esquema de la figura

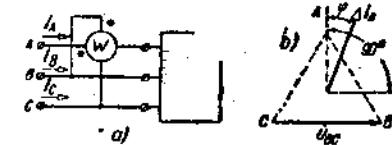


FIG. 14-40

14-40, a. Recurriendo al diagrama vectorial de la figura 14-40, b, se puede demostrar que la potencia medida por el vatímetro es igual a:

$$U_{BC} I_A \cos \angle \dot{U}_{BC}, \dot{I}_A = U_l I_l \cos (90^\circ - \varphi) = U_l I_l \sin \varphi,$$

es decir, que es $\sqrt{3}$ veces menor que la potencia reactiva del receptor.

14-9. Campo magnético giratorio.

Una de las ventajas fundamentales de las corrientes polifásicas, es la posibilidad de obtener campos magnéticos giratorios que condicionan el principio del funcionamiento de los tipos más difundidos de motores de corriente alterna*.

Veamos con un sencillo ejemplo cómo se obtiene el campo magnético giratorio por medio de un sistema trifásico de corrientes. Disponemos tres bobinas iguales, 1, 2 y 3, bajo un ángulo de 120° una respecto a la otra. En la figura 14-41, a, se las puede ver en sección transversal. Conectemos las bobinas 1, 2 y 3 a las fases A, B y C respectivamente de la fuente de alimentación, de tal modo que para el sentido positivo de las corrientes adoptado en la figura 14-41, las corrientes sean simétricas (fig. 14-41, b). Examinemos esquemáticamente

* El campo magnético giratorio fue obtenido por el físico Galileo Ferraris en 1884, si bien éste llegó a una conclusión errónea y desfavorable respecto a su aplicación en los motores eléctricos.

En 1887-1888 el físico e ingeniero Nicola Tesla construyó un motor asincrónico bifásico y en 1889 M. O. Dolivo-Dobrovolsky ideó y construyó un motor asincrónico trifásico. En los años subsiguientes Tesla realizó trabajos para implantar los motores, generadores y transmisiones eléctricas bifásicas en los EE. UU.

Simultáneamente M. O. Dolivo-Dobrovolsky elaboraba todos los eslabones del sistema trifásico y lo introducía en Europa. Fue un auténtico triunfo de la corriente trifásica la instalación de transmisión de energía desde las cataratas de Laufen hasta Frankfurt en el Maine, a una distancia de 175 km, realizada por M. O. Dolivo-Dobrovolsky en 1891. Las ventajas de la corriente trifásica era indudable y pronto ésta fue por todos reconocida y aplicada en todas partes.

los cuadros del campo magnético para distintos momentos consecutivos. Supongamos que el primer momento corresponde a la coincidencia de la línea del tiempo con el vector I_1 . En ese caso $i_1 > 0$, $i_2 < 0$ e $i_3 < 0$. Los sentidos de las corrientes en las bobinas y el cuadro esque-

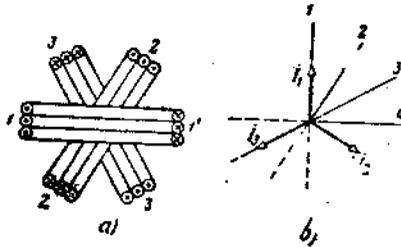


FIG. 14-41

mático del campo magnético se pueden ver en la figura 14-42, a. Para el instante que corresponde a la posición de la línea del tiempo señalada con la cifra 2 será $i_1 > 0$, $i_2 = 0$ e $i_3 < 0$. Los sentidos de las corrientes en las bobinas y el cuadro esquemático del campo están dados en la figura 14-42, b. A continuación, en las figuras 14-42, c y d,

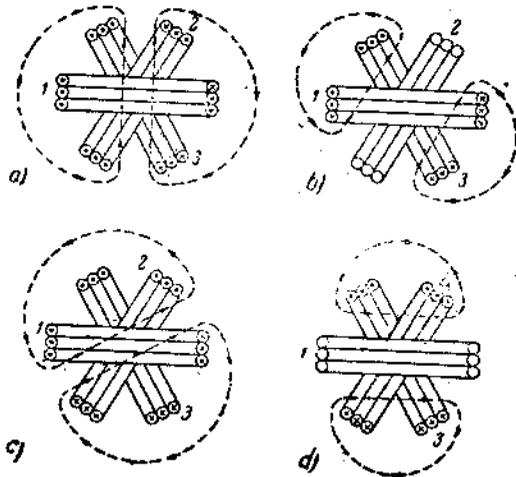


FIG. 14-42

se muestran los sentidos de las corrientes y los cuadros esquemáticos del campo para los momentos correspondientes a las posiciones de la línea del tiempo 3 y 4. La confrontación de los cuadros esquemáticos del campo magnético, presentados para distintos momentos consecutivos, nos muestra gráficamente la rotación del campo magnético. Continuando el análisis comprobaremos que en el transcurso de un período

de la corriente alterna, el campo magnético de tales bobinas efectúa una revolución completa.

El sentido de giro del campo magnético depende exclusivamente de la secuencia de las fases de las corrientes en las bobinas. Si conservamos la conexión de la bobina 1 con la fase A de la fuente de alimentación y conectamos la bobina 2 con la fase C y la bobina 3 con la fase B, el sentido de rotación del campo se invertirá. Podemos verificarlo construyendo los cuadros esquemáticos del campo magnético para momentos distintos en una forma análoga a la indicada anteriormente.

Los campos magnéticos que se mueven en el espacio, uno de cuyos casos particulares es el ejemplo examinado, encuentran amplia aplicación en distintas ramas de la electrotecnia. Para obtener un campo móvil hay que disponer como mínimo de dos arrollamientos desplazados espacialmente, con corrientes que no estén en fase.

14-10. Principios de funcionamiento de los motores asíncrono y síncrono.

Coloquemos entre las bobinas fijas (fig. 14-43) en la zona del campo magnético giratorio un cilindro metálico móvil calzado sobre el eje. Si el campo magnético gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, entonces el cilindro girará en el sentido contrario respecto al

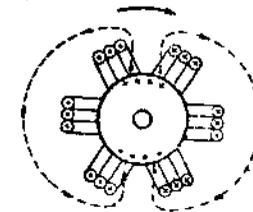


FIG. 14-43

campo. Recordando esto y según la regla de la mano derecha hallaremos el sentido de las corrientes inducidas en el cilindro (indicadas en la fig. 14-32 con cruces y puntos). Luego, aplicando la regla de la mano izquierda, verificaremos que la interacción entre estas corrientes y el campo magnético crea fuerzas que ponen en movimiento el cilindro en el mismo sentido en el que gira el campo magnético. La velocidad de rotación del cilindro será menor que la velocidad de rotación del campo magnético respecto a las bobinas, dado que para velocidades iguales cesaría la inducción de corrientes en el cilindro, no existiendo por consiguiente fuerzas que originen un momento giratorio.

La simplísima instalación examinada aclara el principio de funcionamiento de los *motores trifásicos asíncronos* (asíncrono, no simultáneo). Con este término se destaca la diferencia entre las velocidades del campo giratorio y del rotor que es la parte móvil de la máquina.

Coloquemos entre las bobinas fijas (fig. 14-44) en la zona del campo magnético giratorio, un electroimán calzado sobre el eje y alimentado por una corriente continua. Sobre el electroimán actuará el momento de giro que en cada revolución del campo magnético cambiará

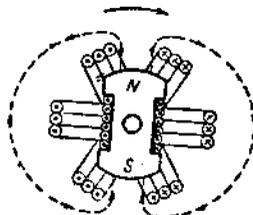


Fig. 14-44

dos veces su sentido. A consecuencia de la variación periódica que sufre el sentido del momento de giro y de la inercia del sistema móvil, el electroimán permanecerá en su lugar. Sin embargo, si se lo hace girar por medio de algún dispositivo, con una velocidad próxima a la del campo giratorio, aquél continuará girando y lo hará con la misma velocidad del campo.

La instalación que acabamos de examinar aclara el principio de funcionamiento de los *motores sincrónicos* trifásicos. La palabra sincrónico se refiere a la igualdad de las velocidades del campo giratorio y del rotor.

En las máquinas eléctricas se crea, para el campo magnético giratorio, un circuito magnético. El estator, la parte fija de la máquina, tiene la forma de un cilindro hueco armado con chapas de acero separadas, aisladas unas de las otras. El rotor o parte móvil de la máquina, en los motores asincrónicos, tiene la forma de un cilindro hueco, armado generalmente también con chapas de acero; el arrollamiento está distribuido en ranuras sobre su superficie.

En la figura 14-45 se da en forma esquemática la sección transversal del estator y del rotor de un motor asincrónico y se muestra la

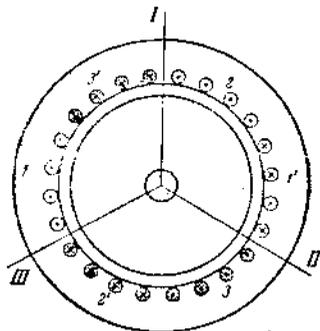


Fig. 14-45

disposición de los conductores de los devanados trifásicos en las ranuras del estator. El devanado del rotor no se ve. Para mayor claridad, los conductores de las distintas fases se han representado de diferente manera. Los tres arrollamientos de fase de la figura 14-45 son equivalentes a las tres bobinas de la figura 14-41. Si los arrollamientos se conectan de tal modo que para los sentidos positivos de la corriente indicados en la figura 14-45, esas corrientes representan un sistema simétrico, se originará un campo magnético giratorio. El lugar de la salida de las líneas magnéticas del estator puede considerarse como si fuera el polo norte del campo giratorio y el lugar de su entrada en el estator, como el polo sur. Un campo giratorio de este tipo puede llamarse bipolar. En un período, el campo giratorio bipolar efectúa una revolución. Para una frecuencia de la corriente alterna de 50 c/s, el campo giratorio bipolar tendrá una velocidad de rotación de 50 rev/seg o de 3 000 rev/min. Si con los arrollamientos del estator se forman seis bobinas en lugar de tres y se las distribuye en la forma adecuada, se podrá obtener un campo giratorio cuadripolar que tiene para una frecuencia de 50 c/s una velocidad de rotación de 1 500 rev/min. Aumentando el número de bobinas puede crearse un campo magnético hexapolar, octopolar, etc. La velocidad de rotación del campo está relacionada con el número de pares de sus polos p y con la frecuencia por medio de la fórmula

$$n = \frac{60f}{p}$$

CAPÍTULO XV

METODOS DE LAS COMPONENTES SIMÉTRICAS

15-1. Componentes simétricas del sistema trifásico de magnitudes.

Para analizar y calcular los regímenes asimétricos en los circuitos trifásicos (máquinas, transformadores), se suele aplicar el método de las *componentes simétricas*. Consiste en representar cualquier sistema asimétrico trifásico de magnitudes (intensidades, tensiones, flujos magnéticos, etc.) en forma de una suma de tres sistemas simétricos de

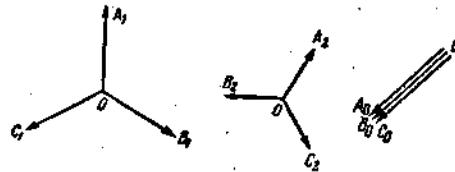


FIG. 15-1

magnitudes, en un caso general, llamadas componentes simétricas del sistema asimétrico dado. Estos tres sistemas simétricos se distinguen uno del otro por la secuencia de las fases y reciben el nombre de sistema de *secuencia directa* (*positiva*), *inversa* (*negativa*) y *nula*.

En el sistema de secuencia directa el orden de sucesión de las fases es A, B, C. En el sistema inverso las fases se suceden en el orden A, C, B. El sistema de secuencia nula consta de tres magnitudes iguales y que están en fase. En la figura 15-1 se dan ejemplos de diagramas vectoriales de los tres sistemas para ciertas magnitudes complejas A, B y C.

Las magnitudes referidas a los sistemas de secuencias directa, inversa y nula se designan por los subíndices 1, 2 y 0 respectivamente. Para esos tres sistemas tenemos las siguientes relaciones:

$$B_1 = A_1 e^{-j\frac{2\pi}{3}}, \quad C_1 = A_1 e^{+j\frac{2\pi}{3}}; \quad (15-1)$$

$$B_2 = A_2 e^{+j\frac{2\pi}{3}}, \quad C_2 = A_2 e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad (15-2)$$

$$A_0 = B_0 = C_0. \quad (15-3)$$

El complejo $e^{j\frac{2\pi}{3}}$ se llama *factor de fase* y se designa abreviadamente por la letra a :

$$a = e^{+j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (15-4)$$

La multiplicación del vector por a corresponde a un giro de 120° en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj o un giro de 240° en el mismo sentido de las agujas del reloj:

$$a^2 = e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (15-5)$$

La multiplicación del vector por a^2 corresponde a un giro hacia adelante de 240° o a un giro hacia atrás de 120° .

Con ayuda del factor de fase, las expresiones (15-1) y (15-2) pueden anotarse de la siguiente manera:

$$B_1 = a^2 A_1, \quad C_1 = a A_1; \quad (15-6)$$

$$B_2 = a A_2, \quad C_2 = a^2 A_2. \quad (15-8)$$

Examinemos algunas relaciones del factor de fase con las cuales nos encontraremos en lo sucesivo:

$$a^3 = e^{j2\pi} = 1. \quad (15-8)$$

Utilizando la expresión (15-8) se puede eliminar de las fórmulas las potencias de a superiores a la segunda:

$$a^4 = a^3 \cdot a = a, \quad a^5 = a^3 \cdot a^2 = a^2, \text{ etc.}$$

1, a y a^2 forman un sistema simétrico de vectores unitarios (fig. 15-2). Su suma es

$$1 + a + a^2 = 0. \quad (15-9)$$

Es fácil verificar que sumando tres sistemas simétricos de vectores de secuencia directa, inversa y nula se obtiene un sistema asimétrico de vectores (fig. 15-3).

Demostremos que cualquier sistema asimétrico de vectores A,

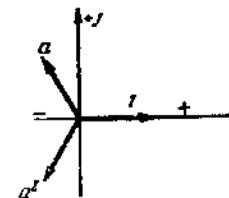


FIG. 15-2

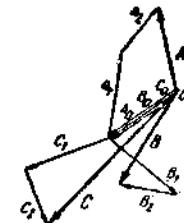


FIG. 15-3

B y C se puede descomponer en sistemas simétricos de secuencias directa, inversa y nula. Si esto tiene lugar, entonces

$$A = A_1 + A_2 + A_0; \quad (15-10)$$

$$B = B_1 + B_2 + B_0; \quad (15-11)$$

$$C = C_1 + C_2 + C_0. \quad (15-12)$$

Expresemos en estas igualdades supuestas todos los vectores de los sistemas simétricos, por medio de los vectores A_1 , A_2 y A_0 , basándonos en las relaciones (15-3), (15-6) y (15-7):

$$A = A_1 + A_2 + A_0; \quad (15-13)$$

$$B = a^2 A_1 + a A_2 + A_0; \quad (15-14)$$

$$C = a A_1 + a^2 A_2 + A_0. \quad (15-15)$$

Se han obtenido tres ecuaciones de las cuales se pueden determinar uniformemente los vectores A_1 , A_2 y A_0 , con lo cual se demuestra la posibilidad de descomponer el sistema asimétrico dado de vectores A, B y C en tres sistemas simétricos.

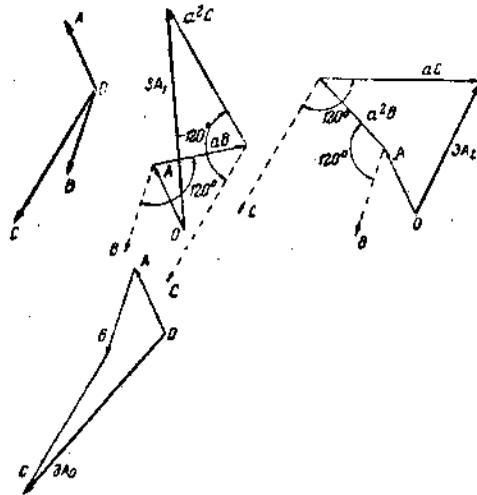


FIG. 15-4

Sumando las ecuaciones (15-13) a (15-15) obtenemos:

$$A + B + C = (1 + a^2 + a)A_1 + (1 + a + a^2)A_2 + 3A_0.$$

en cuenta que $1 + a + a^2 = 0$, hallamos:

$$A_0 = \frac{1}{3}(A + B + C). \quad (15-16)$$

Multiplicando la ecuación (15-14) por a y la (15-15) por a^2 y luego sumando las (15-13) a (15-15), encontramos:

$$A_1 = \frac{1}{3}(A + aB + a^2C). \quad (15-17)$$

Multiplicando la ecuación (15-14) por a^2 y la (15-15) por a y luego sumando las (15-13) a (15-15), hallamos:

$$A_2 = \frac{1}{3}(A + a^2B + aC). \quad (15-18)$$

La descomposición del sistema asimétrico de vectores en componentes simétricas se puede realizar gráficamente. Uno de los métodos de descomposición gráfica se desprende directamente de las expresiones obtenidas más arriba para A_1 , A_2 y A_0 y se reduce a efectuar gráficamente las operaciones indicadas en dichas expresiones (fig. 15-4).

15-2. Algunas propiedades de los circuitos trifásicos en lo que respecta a las componentes simétricas de las corrientes y de las tensiones.

En un conductor neutro la corriente es igual a la suma de las corrientes de línea y por consiguiente, al triple valor de la componente de secuencia nula [ver fórm. (15-16)].

La suma de las tensiones de línea es igual a cero. Por tal motivo las tensiones de línea no contienen componentes de secuencia nula. El grado de asimetría de las tensiones de línea se expresa por la relación entre la componente de la secuencia inversa y la componente de la secuencia directa, en por ciento:

$$\epsilon = 100 \frac{U_{12}}{U_{11}}. \quad (15-19)$$

Esa magnitud se denomina *coeficiente de asimetría*.

El sistema de tensiones de línea se suele considerar prácticamente simétrico, cuando $\epsilon < 5\%$.

Examinemos algunas propiedades de las tensiones de fase de los receptores conectados en estrella, para tensiones de línea asimétricas (fig. 15-5). Sea simétrico uno de los receptores, las admitancias de

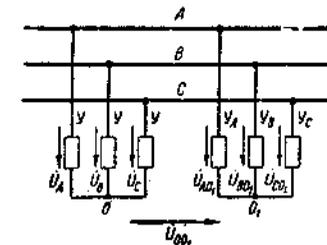


FIG. 15-5

todas sus fases iguales entre sí e iguales a Y y sea el otro receptor asimétrico y sus admitancias de fase Y_A, Y_B, Y_C , distintas.

Determinaremos las tensiones de fase del receptor simétrico por medio de las fórmulas (14-12), (14-14):

$$\dot{U}_A = \frac{Y\dot{U}_{AB} + Y\dot{U}_{AC}}{3Y} = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{AC}}{3}$$

$$\dot{U}_B = \frac{\dot{U}_{BA} + \dot{U}_{BC}}{3}; \quad \dot{U}_C = \frac{\dot{U}_{CA} + \dot{U}_{CB}}{3}$$

Sumando estas expresiones obtendremos $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$. De modo que las tensiones de fase del receptor simétrico no contienen componentes de secuencia nula.

Las tensiones de fase del receptor asimétrico las expresaremos por las del receptor simétrico y la tensión \dot{U}_{OO_1} entre sus puntos neutros. Establezcamos las ecuaciones según la segunda ley de Kirchhoff para las tres mallas AOO_1A, BOO_1B y COO_1C (fig. 15-5):

$$\dot{U}_{AO_1} = \dot{U}_A + \dot{U}_{OO_1};$$

$$\dot{U}_{BO_1} = \dot{U}_B + \dot{U}_{OO_1};$$

$$\dot{U}_{CO_1} = \dot{U}_C + \dot{U}_{OO_1};$$

pero $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$, como se ha demostrado anteriormente, no contienen componentes simétricas de secuencia nula y por consiguiente los tres sumandos iguales \dot{U}_{OO_1} , que intervienen en las expresiones obtenidas para las tensiones de fase del receptor asimétrico, no representan otra

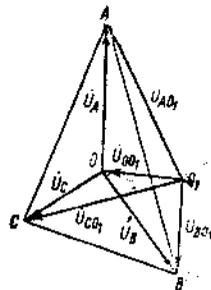


FIG. 15-6

cosa sino el sistema de componentes simétricas de secuencia nula de dichas tensiones. De manera que las componentes simétricas de secuencia nula de las tensiones de fase del receptor asimétrico, son iguales a la tensión \dot{U}_{OO_1} entre los puntos neutros de los receptores simé-

trico y asimétrico. En el diagrama topográfico (fig. 15-6) al punto neutro del receptor simétrico le corresponde el centro de gravedad del triángulo de las tensiones de línea (ver parágrafo 14-6 y fig. 14-16). De allí que la componente simétrica de secuencia nula de las tensiones de fase del receptor asimétrico se determina en el diagrama topográfico por medio de un vector dirigido desde el punto O_1 al centro de gravedad del triángulo de tensiones de línea, O.

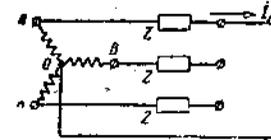


FIG. 15-7

De lo expuesto más arriba se deduce que las tensiones de fase de los distintos receptores, conectados en estrella, para las mismas tensiones de línea sólo pueden distinguirse una de la otra en virtud de la diferencia de las componentes simétricas de secuencia nula. Sus componentes simétricas de secuencia directa e inversa son iguales.

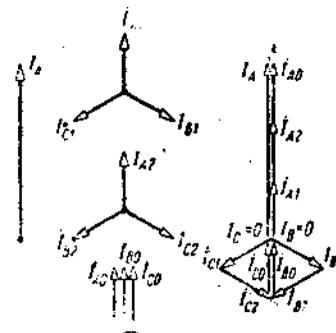


FIG. 15-8

Si las tensiones de línea son simétricas, carecerán de componentes de secuencia inversa y por consiguiente carecerán de ellas las tensiones de fase. En este caso las tensiones de fase del receptor asimétrico conectado en estrella sólo contienen componentes de secuencia directa y nula.

Cuando en un régimen asimétrico no existe corriente en una o en dos fases del circuito, ello implica que la suma de las componentes simétricas de las corrientes en esas fases es igual a cero.

Aclaremos esto con ejemplos. En el esquema (fig. 15-7) las fases B y C están en circuito abierto $I_B = I_C = 0$. Aplicando las fórmulas (15-16) y (15-18), obtenemos:

$$I_{A1} = \frac{1}{3}(I_A + a0 + a^20) = \frac{1}{3}I_A;$$



$$I_{A2} = \frac{1}{3}(I_A + a^2 0 + a 0) = \frac{1}{3} I_A;$$

$$I_{A0} = \frac{1}{3}(I_A + 0 + 0) = \frac{1}{3} I_A.$$

En la figura 15-8 se muestra el vector I_A y se han construido los diagramas vectoriales para los sistemas de componentes simétricas de las

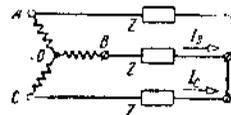


FIG. 15-9

corrientes en las tres fases. En la misma figura se ha efectuado la suma geométrica de los vectores:

$$I_{A1} + I_{A2} + I_{A0} = I_A; \quad I_{B1} + I_{B2} + I_{B0} = 0; \quad I_{C1} + I_{C2} + I_{C0} = 0.$$

En el esquema (fig. 15-9)

$$I_A = 0, \quad I_B = -I_C.$$

De las fórmulas (15-16) y (15-18) obtenemos:

$$I_{A0} = 0;$$

$$I_{A1} = \frac{1}{3}(a I_B + a^2 I_C) = \frac{I_B}{3}(a - a^2) = j \frac{\sqrt{3}}{3} I_B = j \frac{I_B}{\sqrt{3}};$$

$$I_{A2} = \frac{1}{3}(a^2 I_B + a I_C) = \frac{I_B}{3}(a^2 - a) = -j \frac{\sqrt{3}}{3} I_B = -j \frac{I_B}{\sqrt{3}}.$$

En la figura 15-10 se puede ver el diagrama vectorial de las corrientes I_B e I_C y los diagramas vectoriales de las componentes simétricas

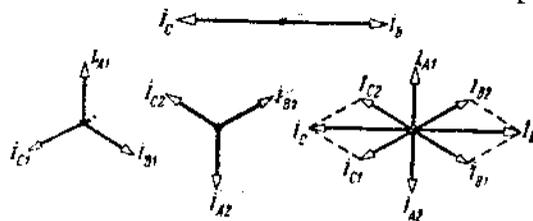


FIG. 15-10

tricas de las corrientes en las tres fases. La suma geométrica de los vectores indica que

$$I_A = I_{A1} + I_{A2} = 0,$$

$$I_B = I_{B1} + I_{B2}$$

e

$$I_C = I_{C1} + I_{C2}.$$

Las componentes simétricas de las corrientes y de las tensiones no sólo pueden ser calculadas sino también medidas por medio de circuitos eléctricos especiales llamados filtros de las componentes simétricas de las corrientes y tensiones. Estos filtros tienen una gran aplicación en la protección de los circuitos electroenergéticos con relés.

15-3. Impedancias de un circuito trifásico simétrico para corrientes de distintas secuencias.

Examinemos el ejemplo particular de un circuito trifásico simétrico con conductor neutro e impedancias $Z_A = Z_B = Z_C = Z$ (fig. 15-11).

Si a los bornes de entrada del circuito se aplica un sistema simétrico de tensiones de fase de secuencia directa $U_A = U_{A1}$, $U_B = U_{B1}$ y $U_C = U_{C1}$, entonces el sistema de las corrientes en el circuito también será simétrico y su secuencia de fases será directa $I_A = I_{A1}$, $I_B = I_{B1}$ e

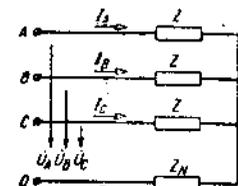


FIG. 15-11

$I_C = I_{C1}$. Las relaciones entre las tensiones de fase simétricas complejas, de secuencia directa, aplicadas al circuito trifásico simétrico y entre las correspondientes corrientes de fase simétricas complejas de secuencia directa, se llaman *impedancia compleja del circuito para las corrientes de secuencia directa*:

$$Z_1 = \frac{U_{A1}}{I_{A1}} = \frac{U_{B1}}{I_{B1}} = \frac{U_{C1}}{I_{C1}}; \quad (15-20)$$

En el ejemplo examinado evidentemente es $Z_1 = Z$.

Si a los bornes de entrada se aplica un sistema simétrico de tensiones de fase de secuencia inversa $U_A = U_{A2}$, $U_B = U_{B2}$ y $U_C = U_{C2}$, entonces habrá en el circuito un sistema simétrico de corrientes que también posee una secuencia inversa de fases, $I_A = I_{A2}$, $I_B = I_{B2}$ e $I_C = I_{C2}$.

Las relaciones entre los valores complejos

$$Z_2 = \frac{U_{A2}}{I_{A2}} = \frac{U_{B2}}{I_{B2}} = \frac{U_{C2}}{I_{C2}}; \quad (15-21)$$

se llaman *impedancias complejas del circuito para las corrientes de secuencia inversa*. En el ejemplo examinado es $Z_2 = Z$.

Finalmente, si a los bornes de entrada del circuito se aplica un sistema simétrico de tensiones de fase de secuencia nula $\dot{U}_A = \dot{U}_B = \dot{U}_C = \dot{U}_0$, el sistema de corrientes en el circuito también será simétrico y tendrá una secuencia de fase nula $\dot{I}_A = \dot{I}_B = \dot{I}_C = \dot{I}_0$. La corriente en el conductor neutro será $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$.

La relación

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} \quad (15-22)$$

se llama *impedancia compleja del circuito para las corrientes de secuencia nula*. Para calcular la impedancia Z_0 establezcamos la ecuación, según la segunda ley de Kirchhoff, para la malla formada por una de las fases, por ejemplo la fase A y por el conductor neutro:

$$\dot{U}_A = Z\dot{I}_A + Z_N\dot{I}_N$$

Sustituyendo $\dot{U}_A = \dot{U}_0$, $\dot{I}_A = \dot{I}_0$ e $\dot{I}_N = 3\dot{I}_0$, obtenemos:

$$\dot{U}_0 = (Z + 3Z_N)\dot{I}_0$$

de donde

$$Z_0 = \frac{\dot{U}_0}{\dot{I}_0} = Z + 3Z_N$$

No existiendo neutro no habrá corrientes de secuencia nula $I_0 = 0$ y $Z_0 = \infty$.

Generalmente a Z_1 , Z_2 y Z_0 se las denomina simplemente *impedancias complejas de secuencias directa, inversa y nula*.

En el cálculo de los circuitos por el método de las componentes simétricas se examinan por separado los esquemas para las corrientes y las tensiones de distintas secuencias. La impedancia en el neutro no ejerce influencia sobre los sistemas simétricos de las corrientes de secuencia directa e inversa, de allí que no se indiquen las impedancias

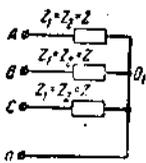


Fig. 15-12

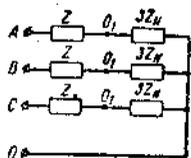


Fig. 15-13

en el conductor neutro, para dichas secuencias (fig. 15-12). En el esquema que se da para las corrientes y tensiones simétricas de secuencia nula se introducen, en lugar de la impedancia Z_N en el neutro, valores triplicados de dicha impedancia en cada fase (fig. 15-13). Es fácil veri-

ficar que las impedancias de secuencia nula en las figuras 15-11 y 15-13, son iguales.

Todos los cálculos se realizan para una fase llamada *fundamental*. Generalmente se toma como fase fundamental la fase A y, para simplificar las notaciones se omite el subíndice A. Para el ejemplo examinado

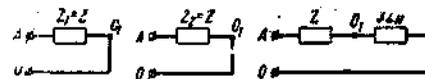


FIG. 15-14

en la figura 15-14 se muestran tres esquemas monofásicos para las corrientes y las tensiones de distintas secuencias. Dichos esquemas se denominan abreviadamente *esquemas de secuencia directa, inversa y nula*.

En los circuitos estáticos trifásicos simétricos cualesquiera (circuitos que no contienen máquinas giratorias), la inversión del ordenamiento de las fases de las tensiones simétricas no modifica la magnitud de las corrientes; de allí que las impedancias y los esquemas de secuencia directa e inversa son iguales.

Como esquemas de secuencia directa e inversa se puede utilizar para líneas trifásicas, cualquiera de los dos esquemas representados en las figuras 14-34 y 14-35.

Formemos para una línea trifásica, un esquema de secuencia nula. La resistencia r_i y la inductancia M_i (fig. 14-33) pueden ser introducidas, de acuerdo a lo expuesto anteriormente, con un valor triplicado en cada fase. Según que las capacidades parciales estén distribuidas en los extremos de la línea o concentrados en el medio, se obtendrán dos variantes del esquema de secuencia nula para una línea trifásica, que no se distinguen por su estructura de los esquemas presentados en las figuras 14-34 y 14-35.

Sólo que en estos esquemas en lugar de r , L_i y C_i debe tomarse $r_0 = r + 3r_i$, $L_0 = L_i + 3M_i = L_i + 2M_i$ y C_0 (las corrientes de secuencia nula no pueden atravesar las capacidades parciales C_m).

En las máquinas eléctricas no sólo Z_0 se distingue de Z_1 sino que tampoco Z_2 es igual a Z_1 . Aclaremos la causa de esto en el ejemplo de un motor asincrónico. En un régimen normal de trabajo cuando a los arrollamientos del estator está aplicado un sistema simétrico de tensiones de secuencia directa, el campo magnético y el rotor del motor giran en un mismo sentido (ver par. 14-10). La velocidad de giro del rotor es generalmente apenas en un 1,5—4% menor que la velocidad del campo magnético giratorio. Otras son las condiciones en un régimen simétrico con corrientes y tensiones de secuencia inversa. Si se asegura a la rotación del rotor la misma velocidad y el mismo sentido que en el régimen normal (por ejemplo con la ayuda de otro motor) y si se invierte al mismo tiempo la secuencia de fases de las tensiones aplicadas a los arrollamientos del estator, entonces en los arro-

llamientos del motor habrá un sistema simétrico de corrientes de secuencia inversa que creará un campo magnético que girará con la misma velocidad que en régimen normal, pero en sentido contrario (al encuentro del movimiento del rotor). Como resultado, el campo magnético giratorio tendrá respecto al rotor una velocidad casi dos veces mayor que la del campo respecto al estator y una velocidad considerablemente mayor que la del campo respecto al rotor en régimen normal. En comparación con el régimen normal aumentarán bruscamente las corrientes inducidas en el rotor. Según la ley de Lenz ellas debilitarán el campo magnético que las induce, en mayor grado que en las condiciones del régimen normal. El debilitamiento del campo giratorio reduce las f.e.m. inducidas por dicho campo en los arrollamientos del estator. Y dado que las tensiones aplicadas a los arrollamientos del estator se equilibran fundamentalmente por esas f.e.m., su disminución hará que aumenten las intensidades de las corrientes en el estator.

Como resultado, para magnitudes iguales de las tensiones simétricas aplicadas, de secuencia directa e inversa y para una velocidad y un sentido invariables de la rotación del rotor, las intensidades de las corrientes de secuencia inversa resultan mayores que las intensidades de secuencia directa. Por consiguiente, la impedancia del motor para las corrientes de secuencia inversa es menor que la impedancia para las corrientes de secuencia directa: $z_2 < z_1$.

Las corrientes de secuencia nula no crean un campo magnético giratorio (para obtener un campo magnético móvil, como ya se indicó en el párrafo 14-9, es necesario disponer no sólo de arrollamientos espacialmente desplazados sino también de corrientes defasadas). En consecuencia, las condiciones del paso de las corrientes de secuencia nula en el motor, se distinguen de las del paso de las corrientes de secuencia directa e inversa, y de allí

$$Z_1 \neq Z_0 \neq Z_2.$$

En los cálculos por el método de las componentes simétricas, se suelen representar los motores y los circuitos estáticos por tres esque-

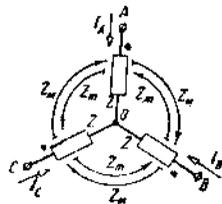


FIG. 15-15

mas distintos de secuencias directa, inversa y nula formados por las impedancias Z_1 , Z_2 y Z_0 respectivamente. Los generadores se representan por esquemas similares con la diferencia de que el esquema de

secuencia directa consta de una impedancia Z_1 conectada en serie con la fuente de tensión, siendo igual esta última a la f.e.m. de fase inducida en el generador.

Los cálculos de los regímenes asimétricos de los circuitos trifásicos que incluyen máquinas para las cuales $Z_2 \neq Z_1$, pueden efectuarse sin recurrir al método de las componentes simétricas; sin embargo, para ello hay que utilizar esquemas de cálculo especiales que tengan dos impedancias complejas distintas de inducción mutua para cada par de fases. Así por ejemplo, para un motor es válido el esquema de la figura 15-15, en el cual

$$Z_{MAB} = Z_{MBC} = Z_{MCA} = Z_m$$

y

$$Z_{MBA} = Z_{MCB} = Z_{MAC} = Z_M,$$

siendo

$$Z_M \neq Z_m.$$

Los valores Z , Z_M y Z_m deben elegirse de tal modo que las impedancias para las corrientes de secuencia directa, inversa y nula, sean iguales a las impedancias Z_1 , Z_2 y Z_0 del motor.

Se puede comprobar que está se verificará siempre que

$$Z = \frac{1}{3}(Z_1 + Z_2 + Z_0);$$

$$Z_m = \frac{1}{3}(aZ_1 + a^2Z_2 + Z_0);$$

$$Z_M = \frac{1}{3}(a^2Z_1 + aZ_2 + Z_0). \quad (15-23)$$

Para un generador el esquema es análogo y sólo se distingue en que en cada fase contiene una fuente de tensión igual a la f.e.m. inducida en la fase correspondiente del arrollamiento del generador (se supone que los arrollamientos están conectados en estrella).

El esquema de cálculo (fig. 15-15) no puede construirse con resistencias, condensadores y bobinas de inducción dado que las impedancias complejas de inducción mutua entre dos elementos reales del circuito se caracterizan por $Z_{MAB} = Z_{MBA}$ y representan una magnitud imaginaria. Mientras que en el esquema de cálculo $Z_M \neq Z_m$ y además como se ve de la (15-23), Z_M y Z_m pueden no sólo ser magnitudes imaginarias sino contener también partes reales.

La desigualdad de las impedancias complejas de inducción mutua Z_M y Z_m nos prueba que los circuitos trifásicos con máquinas giratorias carecen de la propiedad recíproca.

15-4. La determinación de las corrientes en un circuito simétrico.

Para determinar las corrientes en un circuito simétrico (esquema de la fig. 15-16) al cual se aplica un sistema asimétrico de tensiones,

es necesario ante todo hallar por las fórmulas (15-16) y (15-18) las componentes simétricas de las tensiones aplicadas. Las componentes de las corrientes en el circuito dado se pueden considerar como corrientes en tres circuitos simétricos con impedancias Z_1 , Z_2 y Z_0 a cuyos bornes se han aplicado los sistemas de las componentes de tensiones de secuencia directa, inversa y nula, respectivamente. Dado que los regímenes en cada uno de los tres circuitos son simétricos, basta con efectuar el cálculo para una sola fase. Determinamos, según la ley de Ohm, las componentes simétricas de las corrientes:

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1}; \quad i_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2}; \quad i_0 = \frac{\dot{U}_0}{Z_0}. \quad (15-24)$$

Luego, por las fórmulas (15-13) y (15-15), hallamos las corrientes i_A , i_B e i_C .

Cuando el circuito carece de neutro ($Z_N = \infty$) y están dadas las tensiones de línea en sus bornes, se utilizan para el cálculo de las intensidades sólo dos esquemas, los de la secuencia directa e inversa. De lo

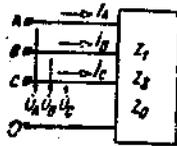


FIG. 15-16

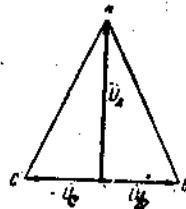


FIG. 15-17

expuesto más arriba se deduce que los cálculos por el método de las componentes simétricas se basan en la aplicación del principio de superposición. Por lo tanto, ese método sólo se puede aplicar a los circuitos lineales o a los que se consideran aproximadamente como tales.

Problema 15-1. Las tensiones de línea en los bornes del motor son $U_{AB} = U_{CA} = 365$ V y $U_{BC} = 312$ V; las impedancias del motor (en el régimen dado)

$$Z_1 = 3,6 + j3,6 \Omega$$

$$Z_2 = 0,15 + j0,5 \Omega$$

no hay conductor neutro. Se quieren determinar las intensidades de línea.

Solución. Las tensiones de fase de la fuente de alimentación pueden ser cualesquiera con tal de que sus diferencias sean iguales a las tensiones de línea dadas. A los efectos del cálculo es cómodo elegir las tensiones de fase del modo que se indica en la figura 15-17. El vector U_A forma un ángulo recto con los vectores \dot{U}_B y \dot{U}_C . Recordemos que la elección arbitraria de las tensiones de fase no repercute en la magnitud de sus componentes simétricas de secuencias directa e inversa [ver (15-2)] y sólo se manifiesta en las componentes simétricas de secuencia

nula las que no hacen falta para el cálculo en este problema puesto que no puede haber corrientes de secuencia nula.

Del triángulo ABC encontramos:

$$U_C = U_B = \frac{312}{2} = 156 \text{ V};$$

$$U_A = 330 \text{ V}.$$

Suponiendo que $\dot{U}_A = 330$ V, serán $\dot{U}_B = -j156$ V y $\dot{U}_C = j156$ V. De acuerdo a las fórmulas (15-17) y (15-18) determinamos

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C) = \frac{1}{3} [330 + j156(-a + a^2)] = \\ &= \frac{1}{3} [330 + j156(+\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2})] = 200 \text{ V}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{3} (\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C) = \frac{1}{3} [330 + j156(-a^2 + a)] = 20 \text{ V}.$$

Según la ley de Ohm hallamos las componentes simétricas de las corrientes

$$i_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} = \frac{200}{3,6 + j3,6} = 39,3 \angle -45^\circ;$$

$$i_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} = \frac{20}{0,15 + j0,5} = 38,3 \angle -73^\circ 18'.$$

Una vez halladas las componentes simétricas de las corrientes y de acuerdo a las fórmulas (15-13) y (15-15) determinamos las corrientes de línea

$$i_A = i_1 + i_2 = 39,3 \angle -45^\circ + 38,3 \angle -73^\circ 18' = 38,8 - j64,5 \text{ A};$$

$$i_B = a^2 i_1 + a i_2 = 39,3 \angle -165^\circ + 38,3 \angle 46^\circ 42' = -11,7 + j17,7 \text{ A};$$

$$i_C = -i_A - i_B = -27,1 + j46,8 \text{ A}.$$

Los valores eficaces de las corrientes son $I_A = 75,2$ A, $I_B = 21,2$ A e $I_C = 54,1$ A.

15-5. Componentes simétricas de las tensiones y de las corrientes en un circuito trifásico asimétrico.

Como se vió más arriba, en los circuitos simétricos las componentes simétricas de las corrientes de cualquier secuencia dependen de las componentes simétricas de la tensión de la misma secuencia solamente. Esta proposición se puede enunciar así: las componentes simétricas de distinto nombre de las corrientes y de las tensiones en los circuitos simétricos, no dependen una de la otra. Estas relaciones son considerablemente más difíciles en los circuitos asimétricos.

Examinemos el ejemplo de un circuito trifásico asimétrico (fig. 15-11) en el cual $Z_A \neq Z_B \neq Z_C$. Si a un circuito de este tipo se le

aplica un sistema simétrico de tensiones de cualquier secuencia, se originará en él un sistema simétrico de corrientes, que en general contiene las componentes de las tres secuencias. Es válida también la proposición inversa: un sistema simétrico de corrientes de cualquier secuencia origina en un circuito de este tipo un sistema de tensiones que en general contiene las componentes de las tres secuencias. En caso de que al circuito se le aplique un sistema asimétrico de tensiones, las componentes simétricas de las corrientes de cualquier secuencia variarán en función de las componentes simétricas de las tensiones de las tres secuencias.

15-6. Cálculo de un circuito con carga asimétrica.

Las cargas asimétricas, en régimen normal, son relativamente raras en los circuitos trifásicos de alto voltaje de los sistemas energéticos (preeminentemente en los hornos de arco). Generalmente las cargas asimétricas se presentan en los cálculos de los regímenes de emergencia (cortocircuitos, interrupciones, desconexión de una fase de la línea o del transformador).

No es conveniente conectar, en los esquemas ramificados de distintas secuencias, una carga asimétrica, ya que con ello el análisis se complica. Resulta más sencillo aprovechar el principio de compensación sustituyendo la carga asimétrica por fuentes de tensión, los valores de cuyas f.e.m. permanecen desconocidos hasta el final de todo el cálculo.

Hecha la sustitución, todo el circuito se vuelve simétrico y entonces las componentes simétricas de distinto nombre de las corrientes y de las tensiones no dependen una de la otra. Las relaciones entre las componentes simétricas de las corrientes y tensiones de distintas secuencias, condicionadas por la asimetría, se introducen posteriormente.

Examinemos el método de cálculo con el ejemplo de un circuito que contiene una carga dinámica simétrica y otra estática asimétrica. El esquema de dicho circuito está representado en la figura 15-18. Sean dadas las f.e.m. del generador y todos los elementos del esquema. Se quieren hallar las intensidades y las tensiones en sus tramos. En la figura 15-18 no se muestran el esquema ni las impedancias de la carga asimétrica puesto que en la primera etapa del cálculo no son necesarias.

Para tener la posibilidad de utilizar una relación simple entre las componentes de las corrientes y de las tensiones que tiene lugar en los circuitos simétricos, es necesario ante todo pasar del esquema asimétrico inicial al simétrico. Esto se puede realizar sustituyendo la carga asimétrica por tres fuentes de tensiones desconocidas \dot{U}_A , \dot{U}_B y \dot{U}_C ; entonces obtendremos un esquema simétrico en el cual, además del generador con su sistema simétrico de f.e.m., habrá fuentes de tensiones asimétricas \dot{U}_A , \dot{U}_B y \dot{U}_C .

Descompongamos estas tensiones en sus componentes simétricas $\dot{U}_{1,2,0}$,

\dot{U}_2 y \dot{U}_0 tomando la fase A como fundamental. Obtendremos un esquema simétrico (fig. 15-19) en el cual la derivación donde estaba la carga contendrá las fuentes de tres sistemas simétricos de tensiones de secuencias directa, inversa y nula.

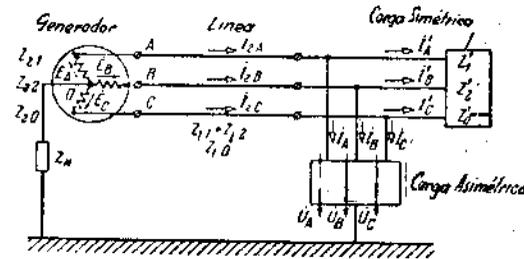


FIG. 15-18

En un circuito simétrico, un sistema simétrico de tensiones de cualquier secuencia origina un sistema simétrico de corrientes de la misma secuencia. Por consiguiente, se pueden construir tres esquemas independientes (fig. 15-20). El régimen de la fase A del esquema inicial se determinará por superposición de los regímenes de estos tres esquemas.

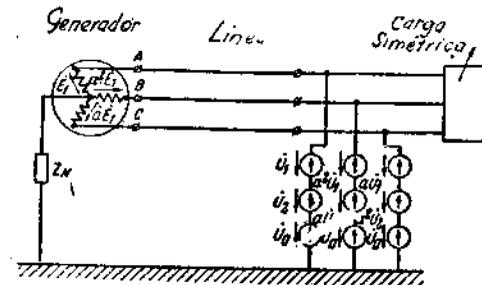


FIG. 15-19

Los esquemas de secuencia directa e inversa siempre tienen igual configuración; la del esquema de secuencia nula es esencialmente distinta.

En el ejemplo dado, este último no tiene derivación ya que en la parte derecha del circuito trifásico inicial no pueden pasar corrientes de secuencia nula.

Debe recordarse que las impedancias en el conductor neutro se introducen en el esquema de secuencia nula con un valor triplicado (ver par. 15-3).

Examinando los esquemas formados, se ve que el valor máximo de las componentes simétricas de las tensiones de secuencia inversa y nula se observa en el lugar de la conexión de la carga asimétrica, puesto que es precisamente allí donde se encuentran las fuentes de tensiones de secuencia inversa y nula.

La etapa siguiente del cálculo, consiste en transformar los esquemas de secuencias diferentes dándoles una forma más simple. Al proceder así, no se someten a transformación las derivaciones que contienen las

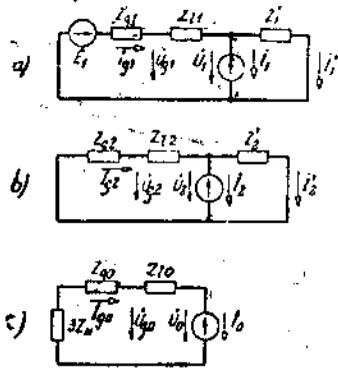


FIG. 15-20

componentes simétricas desconocidas de las tensiones \dot{U}_1 , \dot{U}_2 y \dot{U}_0 . En el circuito de secuencia directa, reemplazamos las ramas del generador y de la carga simétrica por un generador equivalente:

$$\dot{E}_{eq1} = \frac{Y_1 \dot{E}_1}{Y_1 + Y'_1}$$

donde

$$Y_{eq1} = Y_1 + Y'_1$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_{q1} + Z_{l1}}; \quad Y'_1 = \frac{1}{Z'_1}; \quad \dot{E}_1 = \dot{E}_A$$

El esquema correspondiente está dado en la figura 15-21, a. Unificamos las ramas del generador y de la carga en el esquema de secuencia inversa (fig. 15-21, b):

$$Z_{eq2} = \frac{(Z_{q2} + Z_{l2})Z'_2}{Z_{q2} + Z_{l2} + Z'_2}$$

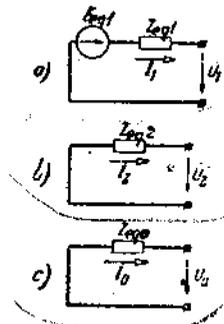


FIG. 15-21

El esquema de secuencia nula, en el ejemplo dado no necesita ser transformado puesto que ya tiene su forma más simple (fig. 15-21, c):

$$Z_{eq0} = Z_{i0} + Z_{p0} + 3Z_N$$

Para cada uno de los tres esquemas escribamos las ecuaciones según la segunda ley de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{eq1} &= Z_{eq1} \dot{I}_1 + \dot{U}_1, \\ 0 &= Z_{eq2} \dot{I}_2 + \dot{U}_2, \\ 0 &= Z_{eq0} \dot{I}_0 + \dot{U}_0. \end{aligned} \tag{15-25}$$

Estas tres ecuaciones tienen tres incógnitas:

$$\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0, \dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0.$$

Las tres ecuaciones complementarias que ligan a estas seis incógnitas pueden deducirse del esquema dado y de los parámetros de la carga asimétrica.

Formemos las ecuaciones complementarias para algunos tipos de las cargas asimétricas. Para la carga representada en la figura 15-22, a,

$$\dot{U}_A = Z_A \dot{I}_A, \quad \dot{I}_B = 0, \quad \dot{I}_C = 0$$

o también,

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 &= Z_A (\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0), \\ a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 &= 0, \\ a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 &= 0. \end{aligned}$$

Para la carga de la figura 15-22, b, tenemos:

$$\dot{I}_A = 0, \quad \dot{U}_B = Z_B \dot{I}_B, \quad \dot{U}_C = Z_C \dot{I}_C$$

o también,

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 &= 0, \\ a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 + \dot{U}_0 &= Z_B (a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0), \\ a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0 &= Z_C (a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0). \end{aligned}$$

No estando la carga asimétrica puesta a tierra, por ejemplo en el esquema representado en la figura 15-22, c, las componentes simétricas de las corrientes de secuencia nula son iguales a cero y se elimina la necesidad de construir los esquemas de secuencia nula en las etapas precedentes. Se obtienen dos ecuaciones fundamentales con cuatro incógnitas y sólo son necesarias dos ecuaciones complementarias, a saber:

$$\dot{I}_A = 0, \quad \dot{U}_B - \dot{U}_C = Z \dot{I}_B$$

o también,

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 + \dot{I}_2 &= 0, \\ a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 - (a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2) &= Z (a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2). \end{aligned}$$

Análogamente se forman las ecuaciones complementarias para otros aspectos de una carga estática asimétrica. La solución simultánea de las

ecuaciones fundamentales de Kirchoff para los esquemas de distintas secuencias, con ecuaciones complementarias permite determinar las componentes simétricas de la corriente de fase A en la derivación que va hacia la carga. Luego se halla la distribución de estos componentes de las corrientes por las distintas ramas de los esquemas de secuencias directa, inversa y nula.

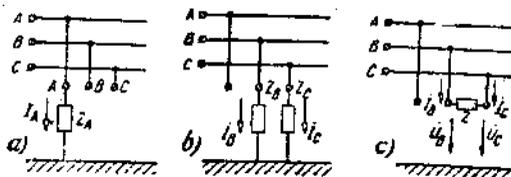


FIG. 15-22

Conociendo las componentes de las corrientes en cualquier rama, se calcula la magnitud de las corrientes reales en cada fase. Conociendo la distribución de dichas componentes, se pueden calcular las componentes de las caídas de tensión de distintas secuencias y luego hallar las tensiones de fase en los distintos tramos del esquema.

Calculemos el régimen (fig. 15-18) para el caso de una carga asimétrica, representada en la figura 15-22, a, siendo $Z_A = 0$ (puesta a tierra de una fase).

Tenemos las tres ecuaciones complementarias siguientes:

$$\dot{U}_B = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0, \quad (15-26)$$

$$\dot{I}_B = a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0; \quad (15-27)$$

$$\dot{I}_C = a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0. \quad (15-28)$$

Restando la (15-28) de la (15-27), tendremos:

$$(a^2 - a) \dot{I}_1 + (a - a^2) \dot{I}_2 = 0 \quad \text{o bien} \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1;$$

sustituyendo este resultado en la (15-27), tenemos:

$$(a^2 + a) \dot{I}_1 + \dot{I}_0 = 0,$$

de donde

$$\dot{I}_0 = -\dot{I}_1.$$

Reemplazamos, en las ecuaciones (15-25), \dot{I}_2 ó \dot{I}_0 por \dot{I}_1 y luego las sumamos.

Entonces, y tomando en cuenta la (15-26), tendremos:

$$\dot{E}_{eq1} = (Z_{eq1} + Z_{eq2} + Z_{eq0}) \dot{I}_1,$$

de donde

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 = \dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_{eq1}}{Z_{eq1} + Z_{eq2} + Z_{eq0}}. \quad (15-29)$$

Las componentes simétricas de las tensiones en el sitio de conexión de la carga (en el sitio de puesta a tierra) se determina de la (15-25):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{E}_{eq1} - Z_{eq1} \dot{I}_1, \\ \dot{U}_2 &= -Z_{eq2} \dot{I}_2, \\ \dot{U}_0 &= -Z_{eq0} \dot{I}_0. \end{aligned}$$

Para el esquema de la figura 15-20, a, tenemos:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_1} \quad \text{e} \quad \dot{I}_{g1} = \dot{I}_1 + \dot{I}'_1.$$

Para el esquema de la figura 15-20, b, tenemos:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_2}{Z_2} \quad \text{e} \quad \dot{I}_{g2} = \dot{I}_2 + \dot{I}'_2.$$

Para el esquema de la figura 15-20, c, tenemos:

$$\dot{I}_{g0} = \dot{I}_0, \quad \dot{I}'_0 = 0.$$

Las componentes simétricas de las tensiones en los bornes del generador pueden hallarse por los mismos esquemas (fig. 15-20):

$$\dot{U}_{g1} = \dot{E}_1 - Z_{g1} \dot{I}_{g1} = \dot{U}_1 + Z_{11} \dot{I}_{g1};$$

$$\dot{U}_{g2} = -Z_{g2} \dot{I}_{g2} = \dot{U}_2 + Z_{12} \dot{I}_{g2};$$

$$\dot{U}_{g0} = -(3Z_N + Z_{g0}) \dot{I}_{g0} = \dot{U}_0 + Z_{10} \dot{I}_{g0}.$$

Observemos que desplazándose desde el punto de conexión de la carga asimétrica, hacia el generador, en el esquema de secuencia directa (fig. 15-20, a) se observará una elevación de la tensión; en cambio en los esquemas de secuencia inversa o nula (fig. 15-20, b y c), una reducción de la tensión.

15-7. Cálculo de un circuito con un tramo asimétrico en la línea.

Analicemos el método de cálculo sobre el ejemplo de un circuito cuyo esquema está representado en la figura 15-23. Sean dadas las f.e.m. del generador y todos los elementos del esquema.

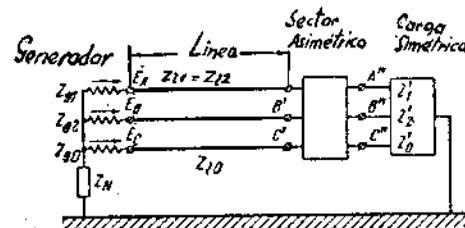


FIG. 15-23

Se quieren encontrar las corrientes y las tensiones en sus tramos. Sustituimos el tramo asimétrico por tres fuentes de tensiones desconocidas $\dot{U}_{A'A''}$, $\dot{U}_{B'B''}$ y $\dot{U}_{C'C''}$. Descompongamos esas tensiones en las componentes simétricas \dot{U}_1 , \dot{U}_2 y \dot{U}_0 adoptando como fundamental la fase A y formemos tres esquemas independientes (fig. 15-24) de secuencia directa, inversa y nula. Escribamos las ecuaciones según la segunda ley de Kirchhoff:

$$\begin{aligned} \dot{E}_1 &= (Z_{g1} + Z_{l1} + Z_1)\dot{I}_1 + \dot{U}_1; \\ 0 &= (Z_{g2} + Z_{l2} + Z_2)\dot{I}_2 + \dot{U}_2; \\ 0 &= (3Z_N + Z_{g0} + Z_{l0} + Z_0)\dot{I}_0 + \dot{U}_0. \end{aligned}$$

En estas tres ecuaciones hay seis incógnitas. Las tres ecuaciones adicionales se forman sobre la base del esquema y de los parámetros del sector asimétrico del circuito.

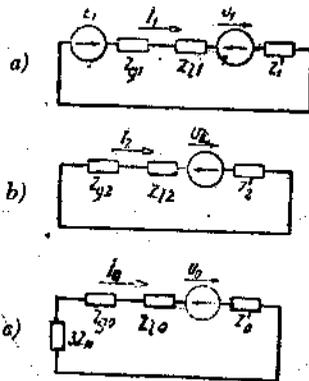


FIG. 15-24

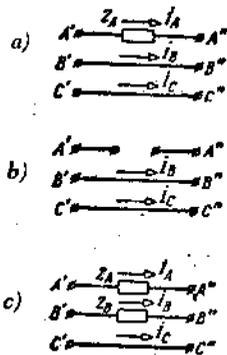


FIG. 15-25

Formemos las ecuaciones adicionales para algunos tipos de tramos asimétricos.

Para el esquema representado en la figura 15-25, a, tenemos:

$$\dot{U}_{A'A''} = Z_A \dot{I}_A, \quad \dot{U}_{B'B''} = 0, \quad \dot{U}_{C'C''} = 0.$$

Para el esquema representado en la figura 15-25, b, tenemos:

$$\dot{I}_A = 0, \quad \dot{U}_{B'B''} = 0, \quad \dot{U}_{C'C''} = 0.$$

Para la figura 15-25, c:

$$\dot{U}_{A'A''} = Z_A \dot{I}_A, \quad \dot{U}_{B'B''} = Z_B \dot{I}_B, \quad \dot{U}_{C'C''} = 0.$$

En estas ecuaciones complementarias hay que expresar las tensiones y las intensidades en función de sus componentes simétricas.

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones fundamentales y las complementarias, encontramos las componentes simétricas de las corrientes y luego determinamos las magnitudes buscadas restantes.

Problema 15-2. El conductor de la fase A de una línea que alimenta a un motor trifásico asincrónico se ha arrancado (fig. 15-26, a). En determinadas condiciones cuyo análisis sale del presente curso, el motor puede seguir funcionando recibiendo alimentación por las dos fases restantes. Sean las tensiones de línea en el régimen considerado $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = 380$ V y el motor funcional con las impedancias $Z_1 = 3,6 + j3,6 \Omega$ y $Z_2 = 0,15 + j0,5 \Omega$. Se quieren determinar las corrientes en los conductores de alimentación y las tensiones $U_{A'A''}$, $U_{B'B''}$, $U_{C'C''}$ y $U_{OO''}$.

Solución. Supongamos que las tensiones entre los bornes A, B y C son creadas por tres fuentes de tensiones simétricas de fase con

$$E_1 = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V.}$$

Reemplacemos el tramo asimétrico del esquema (delimitado en la figura 15-26, a con una línea de puntos) por fuentes de tensión y formemos los esquemas de secuencias directas, inversa y nula (fig. 15-26, b). El circuito de secuencia nula está abierto porque falta el cuarto conductor y no pueden pasar las corrientes de secuencia nula.

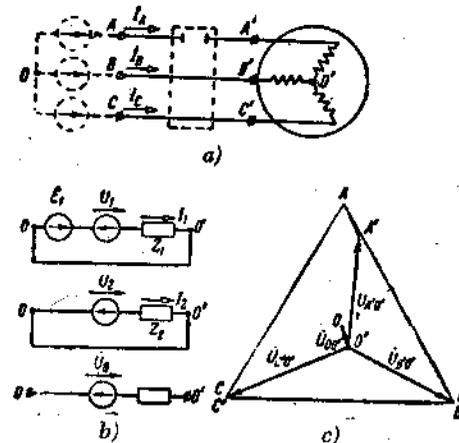


FIG. 15-26

Las ecuaciones fundamentales para los esquemas de secuencias directa e inversa son

$$\dot{E}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + \dot{U}_1; \tag{15-30}$$

$$0 = Z_2 \dot{I}_2 + \dot{U}_2. \tag{15-31}$$

Las ecuaciones complementarias son

$$\dot{I}_A = 0, \quad \dot{U}_{B'B''} = 0, \quad \dot{U}_{C'C''} = 0.$$

Expresando en estas ecuaciones las corrientes y las tensiones por medio de sus componentes simétricas, obtendremos

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = 0 \quad \text{o} \quad \dot{I}_2 = -\dot{I}_1; \quad (15-32)$$

$$a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0; \quad (15-33)$$

$$a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0. \quad (15-34)$$

Resolviendo las ecuaciones (15-33) y (15-34), hallaremos:

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 = \dot{U}_0.$$

Sustituimos $\dot{U}_2 = \dot{U}_1$ e $\dot{I}_2 = -\dot{I}_1$ en la (15-31):

$$0 = -Z_2\dot{I}_1 + \dot{U}_1.$$

Restemos esta ecuación de la (15-30):

$$\dot{E} = (Z_1 + Z_2)\dot{I}_1;$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{220}{3,6 + j3,6 + 0,15 + j0,5} = 39,6 \angle -47^\circ 33' \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 = (a^2 - a)\dot{I}_1 = -j\sqrt{3} \cdot 39,6 \angle -47^\circ 33' = 68,5 \angle -137^\circ 33' \text{ A};$$

$$\dot{U}_2 = -Z_2\dot{I}_2 = 0,522 \angle 73^\circ 18' \cdot 39,6 \angle -47^\circ 33' = 20,67 \angle 25^\circ 45' \text{ V};$$

$$\dot{U}_{AA'} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 3\dot{U}_2 = 62,0 \angle 25^\circ 45' \text{ V};$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_{A'O'} &= Z_1\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2 = (Z_1 - Z_2)\dot{I}_1 = \\ &= (3,6 + j3,6 - 0,15 - j0,5) \cdot 39,6 \angle -47^\circ 33' = 183,5 \angle -5^\circ 36' \text{ V}; \end{aligned}$$

$$\dot{U}_{B'O'} = a^2Z_1\dot{I}_1 + aZ_2\dot{I}_2 = (a^2Z_1 - aZ_2)\dot{I}_1 = 203,5 \angle -116^\circ 43' \text{ V};$$

$$\dot{U}_{C'O'} = aZ_1\dot{I}_1 + a^2Z_2\dot{I}_2 = (aZ_1 - a^2Z_2)\dot{I}_1 = 219 \angle 114^\circ 26' \text{ V};$$

$$\dot{U}_{OO'} = \dot{U}_0 = 20,67 \angle 25^\circ 45' \text{ V}.$$

En la figura 15-26, c se muestra el diagrama topográfico del circuito.

15-8. Potencias de un circuito trifásico expresadas por medio de las componentes simétricas de las corrientes y de las tensiones.

La potencia compleja en el circuito trifásico es

$$\tilde{S} = P + jQ = \dot{U}_A\dot{I}_A + \dot{U}_B\dot{I}_B + \dot{U}_C\dot{I}_C, \quad (15-35)$$

donde $\dot{U}_{A,B,C}$ son las tensiones complejas de fase;

$\dot{I}_{A,B,C}$ son las corrientes complejas conjugadas de fase.

Para las tensiones de fase tenemos:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0;$$

$$\dot{U}_B = a^2\dot{U}_1 + a\dot{U}_2 + \dot{U}_0; \quad (15-36)$$

$$\dot{U}_C = a\dot{U}_1 + a^2\dot{U}_2 + \dot{U}_0.$$

Tomando en cuenta que el complejo conjugado de a es a^2 y recíprocamente, tendremos para las corrientes complejas conjugadas de fase:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0;$$

$$\dot{I}_B = a\dot{I}_1 + a^2\dot{I}_2 + \dot{I}_0; \quad (15-37)$$

$$\dot{I}_C = a^2\dot{I}_1 + a\dot{I}_2 + \dot{I}_0.$$

Sustituyendo las (15-36) y (15-37) en la (15-35), obtenemos:

$$\tilde{S} = 3\dot{U}_1\dot{I}_1 + 3\dot{U}_2\dot{I}_2 + 3\dot{U}_0\dot{I}_0,$$

de donde

$$P = 3U_1I_1 \cos \varphi_1 + 3U_2I_2 \cos \varphi_2 + 3U_0I_0 \cos \varphi_0 = P_1 + P_2 + P_0;$$

$$Q = 3U_1I_1 \sin \varphi_1 + 3U_2I_2 \sin \varphi_2 + 3U_0I_0 \sin \varphi_0 = Q_1 + Q_2 + Q_0,$$

donde $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0$: son las diferencias de fase de las componentes simétricas de las tensiones de fase y de las correspondientes componentes simétricas de las corrientes de fase;

$P_1, P_2, P_0, Q_1, Q_2, Q_0$: son las potencias activas y reactivas de las corrientes y tensiones componentes de secuencias directa, inversa y nula.